UNIVERSIDADE METROPOLITANA DE SANTOS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIA HUMANAS

CURSO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

JOÃO VICTOR SANTANA DE SOUZA

RESOLUÇÃO PROBLEMAS DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: ELEMENTOS DA TEORIA DE BAYES EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

JOÃO VICTOR SANTANA DE SOUZA

RESOLUÇÃO PROBLEMAS DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: ELEMENTOS DA TEORIA DE BAYES EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a finalização do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Metropolitana de Santos - UNIMES.

Orientador: Michel da Costa

Santos, dezembro de 2021

JOÃO VICTOR SANTANA DE SOUZA

RESOLUÇÃO PROBLEMAS DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: ELEMENTOS DA TEORIA DE BAYES EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a finalização do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Metropolitana de Santos - UNIMES.
Orientador: Michel da Costa

Data da defesa/entrega: 08 / 12 / 2021

Membros componente da Banca Examinadora
Presidente e Orientador: Michel da Costa
Membro Titular: Jorge André da Silva Paiva
Membro Titular: Márcia Roberta dos Santos Pires da Silva

Média 10

Universidade Metropolitana de Santos - UNIMES

La mathematica è l'alfabeto nel quale
DIO ha scritto l'universo.

Galileo Galilei

SUMÁRIO

RESUMO

O presente trabalho trata-se de uma proposta de sequência didática para o ensino de probabilidade, Teorema de Bayes, para estudantes do Ensino Médio. O objetivo deste estudo é mostrar a importância de ensinar probabilidade para este nível de ensino visando aplicar os conceitos estudados em nossa vida cotidiana. Inicialmente, buscou-se realizar uma revisão de literatura a respeito da temática, por meio da correlação entre pesquisas acadêmicas e documentos curriculares nacionais. Além disso, os pressupostos teóricos considerados, no trabalho, foram os estudos de George Polya no tocante à metodologia de resolução de problemas. Apresentou-se algumas aplicações de probabilidade e principalmente como tratar a probabilidade dentro da sala de aula, por meio das três maneiras de mostrar a probabilidade: com uma questão do Enem no modelo tradicional, com o jogo de cartas *Blackjack* e com o jogo *Franc-Carreau* desenvolvido no *software* GeoGebra.

Palavras-chave – Probabilidade. *Blackjack*. Franc Carreau. Matemática no Ensino Médio. Sequência Didática para Matemática.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho teve como motivação o gosto pelo ensino de probabilidade, principalmente no Ensino Médio, em que se consegue mostrar uma Matemática mais próxima dos alunos em que eles mesmos podem ver de fato acontecer.

Nesse panorama, a probabilidade é algo próximo da realidade dos alunos, é interessante trabalhar com jogos com eles e mostrar como a probabilidade acontece, mostrando algumas curiosidades até em jogos de azar por exemplo, ensinar como calcula a probabilidade de ganhar na mega sena, ou em outros jogos como este.

No dia a dia usamos bastante essa ideia de probabilidade de forma intuitiva, por exemplo, quando a gente acorda e vai olhar o clima pela janela, verificamos como o tempo está ou pesquisamos, na *internet*, qual a previsão do tempo para aquele dia e somente a partir disso escolhemos qual roupa usar, se levaremos o guarda-chuva para o trabalho ou não. Podemos também, por meio da probabilidade intuitiva, ter uma noção da hora em que temos que sair de casa para não chegarmos atrasados no trabalho, de estar no trânsito congestionado, também calcular a chance do nosso time de futebol ganhar e assim por diante.

A probabilidade é tratada na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, e desta forma, nesse trabalho trataremos um pouco acerca da importância de ensinar probabilidade nessa etapa, mostrando como podem ser aplicados esses conceitos estudados em sala de aula em diferentes situações da própria vida.

Assim, o objetivo do presente estudo é mostrar a importância de ensinar probabilidade no ensino médio e aplicar os conceitos estudados em nossa vida cotidiana.

No presente trabalho buscamos inicialmente a revisão de literatura a respeito da temática, fazendo uma correlação entre pesquisas acadêmicas e documentos curriculares nacionais. Em seguida, pretende-se apresentar três atividades para o ensino de probabilidade que podem compor uma sequência didática com uso de recursos convencionais, jogos e finalizando com uso de *software,* a fim de mostrar o potencial que a tecnologia pode ter em práticas de ensino de matemática.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E TEORIA DE BAYES NO CONTEXTO DA PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

O teorema de Bayes representa uma teoria ou lei matemática utilizada para calcular a probabilidade de um evento que ocorreu correlacionado a outro evento, assim considerando a probabilidade condicional. Um grande problema com o teorema de Bayes é que se precisa de algumas informações prévias, ou seja, precisa saber se um evento ocorreu e qual é a probabilidade desse evento. É a partir desse raciocínio bayesiano que emerge a expressão "confiança", ou seja, confiança em determinados eventos anteriores, ou seja, essa hipótese inicial.

Corroborando que a perspectiva que trata esse teorema é relevante para diversas áreas do conhecimento, estando presente em importantes campos da sociedade, pois para a melhor compreensão utiliza conhecimentos que vão além da aplicação simplista de fórmulas matemáticas. Sendo assim, o Teorema de Bayes pode nos auxiliar a resolver problemas que envolvem desde situações em que usamos a intuição para interpretá-las até situações mais complexas, como no caso de diagnosticar uma doença sabendo o resultado de um exame, tal como indicam estudos de Jesuz *et al*, (2016).

A leitura inicial dos estudos desses autores que teve como fruto o artigo “Uma proposta para o ensino do Teorema de Bayes na perspectiva da resolução de problemas”, a ideia foi de mostrar uma proposta para ensinar o teorema de Bayes com a resolução de problemas, na tentativa de aproximar os objetos matemáticos do contexto geral.

Assim, os pressupostos teóricos desse trabalho, considera ideias de George Polya no tocante à resolução de problemas. George Polya foi um matemático húngaro que viveu de 1887 a 1985 e fez contribuições fundamentais em Análise Combinatória, Teoria dos Números, Análise Numérica e Teoria da Probabilidade. Mais para o final de sua carreira, interessou-se por questões de Ensino e, especialmente, por resolução de problemas, buscando identificar métodos sistemáticos no processo de resolução e, mais geralmente, de invenção em Matemática.

Diante desse cenário, a intenção do trabalho foi apresentar uma proposta para a introdução do Teorema de Bayes. A construção dessa proposta foi fundamentada na resolução de problemas, a partir de uma perspectiva que articula a metodologia proposta por Onuchic e Allevato (2011) e o modelo de Polya (1994).

No Quadro 1, apresentamos algumas considerações com base na proposta de Onuchic e Allevato (2011) relacionando o papel do professor na etapa da resolução do problema com o papel do aluno, segundo as fases sugeridas por Polya (1994) para a resolução de um problema, uma vez que Polya (1994) não tem a preocupação de discutir o papel do professor.

Quadro 1: Modelo de Polya para as fases de Resolução de Problemas

Fase	Papel do Estudante	Papel do Professor
Compreensão do problema	*Familiarização*: Nesse momento o estudante compreende o problema de forma mais geral, considerando seus objetivos e dados mais relevantes. *Aperfeiçoamento da compreensão:* O estudante consegue explicar o enunciado com suas próprias palavras e tem o problema claro em sua mente.	Destaca-se o papel do professor de escolher bem o problema que irá propor, de forma que os estudantes tenham interesse em resolvê-lo. Segundo Polya (1994) o problema deve ser natural e interessante, nem muito simples e nem muito complexo.
O estabelecimento de um plano	Elaborar um plano para tentar resolver o problema proposto. Ao elaborar o plano, o estudante distingue o que fará em cada um dos passos desse plano, quais estratégias serão utilizadas e quais objetivos conseguirá atingir ao desenvolver essas estratégias.	"O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso" (POLYA, 1994, p. 5). Nesse contexto o professor deve questionar os estudantes, de modo que seus questionamentos possibilitem que eles estabeleçam seu plano.
Execução do Plano	O estudante deverá colocar em prática as estratégias traçadas na etapa anterior.	Se o estudante houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade.
Retrospecto	Nessa fase, os estudantes têm a oportunidade de analisar todo o problema, revisando cada um dos passos, desde a compreensão do problema até a resposta, verificando também se está de fato respondendo a questão central levantada no problema.	O professor pode orientar os estudantes a discutir, analisar e comparar suas resoluções, percebendo semelhanças e diferenças nas estratégias utilizadas, avaliando se fariam diferente ou não depois de saber como seus colegas resolveram o problema. Pode também encorajar os estudantes a imaginar outros problemas nos quais poderiam utilizar a mesma ideia ou estratégia.

Fonte: Polya (1994) *apud* Onuchic e Allevato (2011).

No Quadro 2 mostra o momento em que o professor se dirige a um estudante e o questiona com o enunciado do problema de Monty Hall, exibido no trecho do filme Quebrando a banca. Esse trecho, do filme, desempenha, no contexto, a função de suscitar nos estudantes o desejo de resolver o problema, de investigá-lo, conforme propõe o modelo de Polya.

Quadro 2: Problema de Monty Hall

Suponha que o participante de um programa de auditório tenha a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há bodes. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando um bode. Ele diz então ao participante: "Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta?" Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?

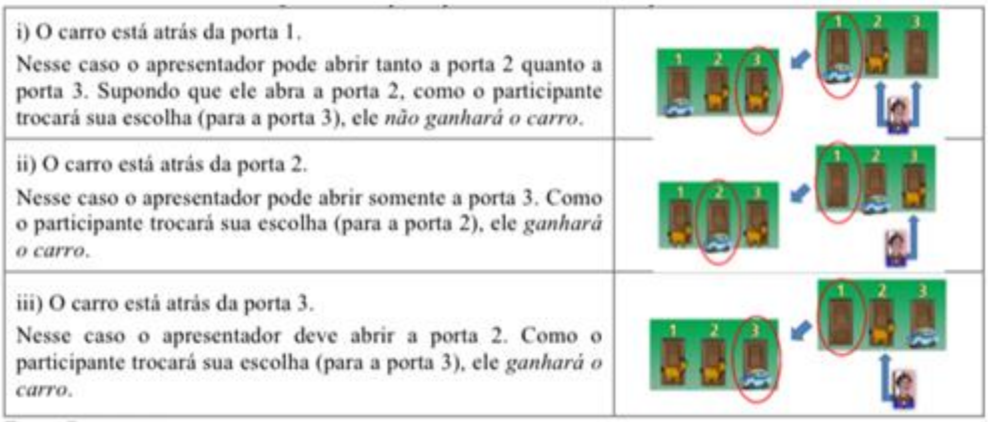
Fonte: Mlodinow (2009, p. 52) e do filme Quebrando a banca *apud* Jesuz *et a*l, 2016, p. 4.

Após as discussões iniciais, com vistas a compreender o problema, os estudantes devem ser direcionados para o estabelecimento de um plano (POLYA, 1994). Para isso, pode-se propor a realização de simulações do Problema de Monty Hall por meio do software *GeoGebra*.

Os resultados das simulações, e as conjecturas decorrentes, devem ser registrados pelos estudantes, observando particularmente o número de simulações e o número de vitórias. Esses resultados devem ser colocados em discussão por meio de uma plenária, momento em que o professor pode selecionar algumas resoluções para serem registradas na lousa (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Uma possível solução apresentada pelos participantes dessa simulação é de que essa resolução supõe que o participante escolha arbitrariamente a porta 1 – suposição que pode ser feita com qualquer uma das portas. Duas situações precisam ser consideradas, são elas: a) o participante trocará a escolha da porta, quando o apresentador lhe oferecer essa oportunidade; e b) o participante manterá a escolha da porta, recusando a oferta do apresentador. Em ambas as situações temos três casos a considerar: i) o carro está atrás da porta 1; ii) o carro está atrás da porta 2; iii) o carro está atrás da porta 3. Vamos analisar as duas situações, considerando os três casos em cada uma delas, para identificar dentre elas qual opção será vantajosa para o participante: trocar (Quadro 3) ou não trocar (Quadro 4) a escolha da porta.

Quadro 3 – Participante troca da porta em qualquer circunstância

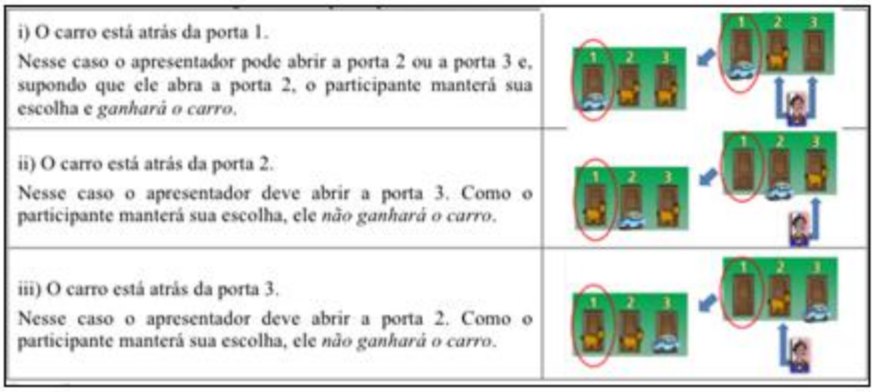


i) O carro está atrás da porta 1. Nesse caso o apresentador pode abrir tanto a porta 2 quanto a porta 3. Supondo que ele abra a porta 2, como o participante trocará sua escolha (para a porta 3), ele *não ganhará o carro.*
ii) O carro está atrás da porta 2. Nesse caso o apresentador pode abrir somente a porta 3. Como o participante trocará sua escolha (para a porta 2), ele *ganhará o carro.*
iii) O carro está atrás da porta 3. Nesse caso o apresentador deve abrir a porta 2. Como o participante trocará sua escolha (para a porta 3), ele *ganhará o carro.*

Fonte: Jesuz et al, 2016, p. 6.

Dessa forma, das três possibilidades, ao trocar de porta, o participante ganhará o carro em duas delas. Vamos agora considerar a segunda situação, conforme o Quadro 4:

Quadro 4 – Participante não troca da porta em qualquer circunstância



i) O carro está atrás da porta 1. Nesse caso o apresentador pode abrir a porta 2 ou a porta 3 e, supondo que ele abra a porta 2, o participante manterá sua escolha e *ganhará o carro.*
ii) O carro está atrás da porta 2. Nesse caso o apresentador deve abrir a porta 3. Como o participante manterá sua escolha, ele *não ganhará o carro.*
iii) O carro está atrás da porta 3. Nesse caso o apresentador deve abrir a porta 2. Como o participante manterá sua escolha, ele *não ganhará o carro.*

Fonte: Jesuz et al, 2016, p. 7.

Assim, das três possibilidades, ao manter a escolha da porta, o participante ganhará o carro em uma delas. Portanto, trocar a escolha da porta será vantajoso para o participante, pois representa 2/3 da chance de ganhar o carro, enquanto se ele não trocar a escolha, tem apenas 1/3 da chance.

Esse encaminhamento é suficiente para resolver o problema e revela a ideia intuitiva do Teorema de Bayes.

Depois, os participantes apresentam a resolução desse mesmo problema por meio do teorema de Bayes sistematizado.

Sobre a natureza da probabilidade e as finalidades de seu ensino na Educação Básica, Batanero (2006) destaca que a probabilidade é parte da matemática e base de outras disciplinas e é essencial para preparar os estudantes, visto que o acaso e os fenômenos aleatórios estão presentes em nossas vidas.

De acordo com Dante (2003), um problema é qualquer situação que requer pensamento pessoal para resolvê-lo. Por outro lado, os problemas matemáticos requerem não apenas pensamento, mas também conhecimento e métodos de raciocínio matemático para resolvê-los. É preciso enfatizar que não existe apenas uma forma de representar problemas matemáticos, pois eles se subdividem em alguns aspectos, tais como: exercícios e algoritmos de reconhecimento, problemas de padrões simples e complexos, problemas de processo ou heurísticos, problemas de aplicação e quebra-cabeças. Cada um deles tem sua particularidade. Para resolver esses problemas, um método possível é a resolução de problemas.

A resolução de problemas é o resultado da pesquisa desenvolvida por George Polya, em 1944. No entanto, sua pesquisa realmente começou na década de 1960 e, nos Estados Unidos, limitou-se a solucionar e treinar problemas.

> A importância dada a Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção.
>
> [...] Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade. (ONUCHIC, 1999, p. 203).

Onuchic (1999) mostrou que a resolução de problemas pode ser usada como método de aprendizagem da matemática. Os professores estudam um tópico em sala de aula e resolvem problemas matemáticos para os alunos. No entanto, em alguns casos, estes não são problemas reais porque não existe um desafio real ou uma necessidade real de verificar os resultados, o que pode impedir os alunos de resolverem problemas reais por pensarem que se trata de uma repetição. Por outro lado, em seu livro "The Art of Problem Solving", Polya mostra uma maneira de resolver problemas por meio do conteúdo matemático que foi aprendido, e pode mostrar aos alunos que seus conceitos estão inter-relacionados nesses problemas.

Polya (2006) aborda quatro etapas para resolver um problema:

1.Compreendendo o problema: os alunos precisam entender o problema e tentar

Resolva esse problema. Ele também deve considerar as partes mais importantes da declaração de várias perspectivas, como incógnitas, dados e condições. Caso o aluno não compreenda a questão levantada, o professor deve auxiliá-lo com cautela e naturalidade, apontando os passos a serem dados. O professor escolhe uma pergunta que não é nem muito difícil nem muito fácil.

2. Estabeleça um plano: precisa encontrar a conexão entre os dados e o desconhecido. Se você resolveu um problema semelhante, pode usá-lo. Finalmente, você precisa elaborar um plano para resolver o problema.

3. Execução do plano: Para ser capaz de executar o plano, é necessário utilizar conhecimentos prévios, ter bons hábitos psicológicos e focar nos objetivos. Finalmente, execute o plano com paciência.

4. Verifique a solução: Se os alunos revisarem a solução completa, reconsiderar e verificar novamente o resultado final e o caminho que conduz a ele, eles podem construir seu conhecimento e melhorar suas habilidades de resolução de problemas. O professor deve compreender e transmitir aos seus alunos o conceito de que nenhum problema se esgota por completo e deve encorajá-los a imaginar uma situação em que possam usar o programa novamente.

3. DOCUMENTOS CURRICULARES ACERCA PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS À BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

3.1. Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997-2000)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) estabelecem que a principal finalidade para o estudo de probabilidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos.

O presente documento indica que “as noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos” (BRASIL, 1997, p. 56).

O objetivo principal dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é adequar o ensino às necessidades atuais do mercado global. Embora os PCN sejam apenas simbólicos, nos últimos anos eles tiveram um impacto direto e importante no sistema de ensino que mantém uma rede de relações entre o ensino e a aprendizagem.

Os PCN foram produzidos na década de 1990 com o objetivo de organizar recomendações curriculares para a educação nacional e as práticas pedagógicas e consolidar os indicadores básicos da educação. Esse esforço tem recebido apoio direto ou indireto de instituições nacionais e internacionais, como o Banco Internacional de Reconstrução e Desenvolvimento (BIRD), o Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID) e até mesmo o Fundo Monetário Internacional (FMI). Essas instruções são significativas porque contribuem para a construção sócio-histórica do currículo e orientam o processo de reconstrução e recontextualização curricular.

O roteiro curricular do PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000) tem como base a Lei de Diretrizes e Bases

(LDB), partindo da ideia de que nessa etapa da Educação Básica não é restrita à profissionalização e ou com a visão propedêutica, em que seria uma preparação para o Ensino Superior, então essa será uma combinação dessas duas intenções, ou seja, preparar o cidadão para refletir acerca da suas múltiplas realidades e desenvolver a razão e interpretar as informações de forma lógica e abstrata.

A ideia é que os cidadãos que concluíram o ensino médio, dominem as competências e aptidões esperadas no ensino médio, façam carreira profissional e continuem estudando e ingressando no ensino superior. A intenção das diretrizes estipuladas no PCNEM é produzir um alicerce favorável, uma mudança positiva e orientar a geração e construção do conhecimento escolar.

Segundo a LDB e o PCN, o Ensino Médio é a etapa final da educação geral, que possibilita aos alunos se tornarem produtores de conhecimento e participantes do mundo do trabalho.

Assim, todos os atuais documentos legais e curriculares em nível nacional indicam a melhoria da qualidade do aluno como ser humano, sua formação moral, o desenvolvimento da autonomia intelectual e do desenvolvimento crítico, sua preparação para o mundo do trabalho e o desenvolvimento de habilidades para a continuidade do aprendizado.

Aprendizagem. A LDB (BRASIL, 1996) propõe uma organização do curso com os seguintes componentes:

- base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada que atenda especificidades regionais e locais da sociedade (art. 26);
- planejamento e desenvolvimento orgânico do currículo, superando a organização por disciplinas estanques (art.12);
- integração e articulação dos conhecimentos em processo permanente de interdisciplinaridade e contextualização (art.13);
- proposta pedagógica elaborada e executada pelos estabelecimentos de ensino, respeitadas as normas comuns e as de seu sistema de ensino (art 12.);
- participação dos docentes na elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino (art. 14).

A organização dos conteúdos, a definição das estratégias de aprendizagem e a organização de todo o curso devem ser consideradas para que os alunos possam viver, produzir e vivenciar subjetivamente em sociedade, assim espera-se que os alunos vão além da leitura das informações nesta fase da educação escolar (Ensino Médio) e reflitam sobre o seu significado de forma mais crítica, pois:

> Não se trata nem de profissionalizar, nem de deitar na água para fazer mais rala a teoria. Trata-se, isso sim, de ensinar melhor a teoria – qualquer que seja – de forma bem ancorada na prática. As pontes entre a teoria e a prática têm que ser construídas cuidadosamente e de forma explícita. Essas pontes implicam em fazer a relação, por exemplo, entre o que se aprendeu na aula de matemática na segunda-feira com a lição sobre atrito na aula de física da terça e com a sua observação de um automóvel cantando pneus na tarde da quarta. Para a maioria dos alunos, infelizmente, ou a escola o ajuda a fazer estas pontes ou elas permanecerão sem ser feitas, perdendo-se assim a essência do que é uma boa educação. (BRASIL, 1998, p.32).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais das séries iniciais (BRASIL, 1997) ao referente ao Ensino Médio (BRASIL, 2000) foram documentos que historicamente contribuíram com os currículos efetivados nos diferentes sistemas e escolas em nosso país, pois apesar de não ter caráter de lei, as indicações eram de extrema relevância no caminho para uma educação de qualidade cognitiva, afetiva e social.

3.2. Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017-2018)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento norteador do currículo no país, sendo publicada em sua terceira e atual versão em 2018 em que as indicações para o Ensino Médio constam objetos do conhecimento, competências e habilidades necessários a serem trabalhados nessa etapa da escolarização, mas tendo flexibilidade no decorrer dos três anos, já que o documento não faz indicações anualmente.

Já nas diretrizes norteadoras iniciais indica que para o ensino de matemática é necessário aos alunos compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

A incerteza e o tratamento de dados são estudados na Unidade Temática Probabilidade e Estatística. Propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações - problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos.

No que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral.

No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem.

Na parte tocante ao Ensino Médio, a área matemática e suas tecnologias busca o aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino.

Em relação à Probabilidade, os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os Anos Iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

3.2.1. Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

Na busca de correlacionar a presente pesquisa à BNCC (BRASIL, 2018), extraímos do documento as habilidades em que a probabilidade está presente no desenvolvimento das competências do componente:

> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
> (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
> (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos,

> equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
> (EM13CNT205) Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências. (BRASIL, 2018, p. 525-534)

Nesse panorama, a construção das diretrizes considera o currículo em espiral, tudo o que se inicia no Ensino Fundamental é retomado e consolidado no Ensino Médio, por meio de ações formativas em que se considerem a aprendizagem significativa, múltiplos contextos dos alunos e necessidades globais e locais relativas aos objetos matemáticos do conhecimento.

4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O objetivo nesta seção é ilustrar, por meio de três maneiras distintas, a abordagem da probabilidade de uma forma diferenciada com os alunos do ensino médio, primeiro abordar a probabilidade de forma tradicional em cima de algum exercício, como por exemplo, um exercício do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) também abordar a probabilidade de uma forma mais lúdica sem usar a tecnologia como no jogo de cartas *BlackJack*, mais conhecido como 21 aqui no Brasil e depois abordar a probabilidade usando a tecnologia em um jogo chamado Frac-Carreau desenvolvido no software livre Geogebra.

4.1. Atividade com Recursos Tradicionais – Lápis e Papel

Para iniciar a reflexão a respeito da probabilidade, escolhemos uma questão clássica, extraída do primeiro Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), aplicado em 1998, em que tais conteúdos já eram abordados, demonstrando a preocupação com a probabilidade na formação do aluno egresso desse nível de escolaridade.

O Quadro 05 indica a questão escolhida, num contexto de jogo, comum à época em programas de televisão e ainda no contexto atual.

Quadro 5 – Questão do ENEM de 1998, abordando Probabilidade

ENEM/98

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

20 A probabilidade de o **participante** não ganhar qualquer prêmio é igual a:

(A) 0
(B) 1/3
(C) 1/4
(D) 1/2
(E) 1/6

21 A probabilidade de o **concorrente** ganhar exatamente o valor de R$400,00 é igual a:

(A) 0
(B) 1/3
(C) 1/2
(D) 2/3
(E) 1/6

Fonte: Inep.gov.br. Acesso em: 01 nov. 2021.

Para resolver a primeira parte da questão (20), o professor deve indicar aos alunos que a probabilidade pode ser considerada uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

Onúmero de casos possíveisé igual a 6, pois existem 6 formas de ordenar as letras T V E.

Para o participante não ganhar qualquer prêmio, ele terá que ordenar as letras fora da ordem.

Para isso, existem dois casos:

E T V ou V E T. Logo, o número de casos favoráveis é igual a 2 e a probabilidade é igual a:

$P = 2/6 \rightarrow P = 1/3$.

Em continuidade, para a questão seguinte (21):

Para o participante ganhar exatamente R$ 400,00, o mesmo deverá desvirar duas letras na posição correta.

Porém, se duas letras estão na posição correta, então a terceira também estará.

Logo, não é possível ganhar R$400,00 e a probabilidade é 0.

Essa última questão, demonstra um caso de evento impossível, já que não é possível errar uma apenas, pois acertando a posição de duas letras, automaticamente a terceira também estaria na posição correta.

4.2. Jogo 21 (ou *Blackjack*)

Em continuidade à sequência didática, o professor pode envolver a turma em uma atividade lúdica, precisando apenas para o jogo do recurso baralho convencional, material simples e que muitos alunos possivelmente já possuam.

Assim, o *Blackjack,* conhecido como 21 no Brasil, é um jogo de cartas de elite, divertido, clássico e com muitas chances de ganhar, se jogá-lo aplicando as estratégias ideais para gerenciar os baralhos que lhe facilita o *croupier*, e além de tudo pode aprender um pouco de probabilidade com esse jogo.

O professor pode pedir para algum aluno responder à turma: "Como se joga *Blackjack*?"

Assim, considerando que principal objetivo do *Blackjack* é chegar o mais próximo possível, sem ultrapassar, dos 21 pontos nas cartas. Quando a jogada é iniciada, dois baralhos são entregues ao jogador, ambas cartas serão descobertas com a pontuação visível.

O *croupier* coloca sobre a mesa duas cartas uma delas coberta e a outra descoberta. Para vencer a casa, a pontuação não deve exceder 21, caso contrário você perderá imediatamente. Você deve tentar se aproximar o mais possível ao 21, e levar vantagem sobre o *croupier*.

Se as primeiras duas cartas não chegarem perto de 21, o jogador pode solicitar uma nova carta ou mais, mas não deve exceder 21. Em um jogo de *Blackjack* o jogador se opõe ao *croupier* diretamente.

Os baralhos e sua pontuação no *Blackjack*

No *Blackjack* online as cartas adquirem um valor diferente, o Ás pode adquirir dois valores, um e onze segundo a conveniência do jogador. Os baralhos com números compreendidos entre dois e nove valem o mesmo.

Enquanto os *naipes 10*, J, Q, e K têm um valor de 10 pontos. Se você tiver um Ás e uma carta com valor de 10 pontos ganha automaticamente pois tem um *Blackjack*, é uma mão forte que te leva à vitória.

Após a explicação de alguns alunos, considerando algumas variabilidades das Regras do *blackjack*, poderiam ser convencionadas (ou com alguma adaptação distinta):

Para jogar *Blackjack* online algumas regras devem ser cumpridas:

- Escolhe-se um montante de aposta antes de repartir as cartas.
- As cartas do mesmo valor podem ser divididas e seguidas com duas mãos independentes.
- Se você decidir dividir a jogada você deve duplicar o valor da aposta e tomar apenas uma carta adicional para cada mão.
- O *croupier* deve distribuir cartas se tiver 16 pontos ou menos.
- O *croupier* deve ser plantado com 17 pontos ou mais.
- Em caso de retirada, o jogador perde 50% da aposta.
- Se houver um empate a aposta é preservada.

Como ganhar no *Blackjack* ?

Para aumentar suas chances de ganhar ao *Blackjack* desde seu dispositivo móvel ou computador de mesa, você deve ter em mente uma estratégia ou técnica. As estratégias mais recomendadas por especialistas são:

• Plantar quando você somar 17 ou 18 pontos.

• Peça mais cartas quando tiver 12 pontos ou menos.

• Plantar quando tiver entre 13 e 16 pontos desde que o *croupier* tenha uma carta entre 2 - 6.

• Pedir cartas quando tiver entre 13 e 16 pontos se o *croupier* possuir uma carta inicial maior que 6.

Uma das estratégias mais usuais é contar cartas, é dado um valor de -1 para as cartas mais altas 10, J, Q, K e Ás. As cartas com os valores 7, 8 e 9 têm zero (0) pontos. As cartas compreendidas entre 2 e 6 adquirem um valor de +1.

Figura 1 – *Blackjack* ou Jogo 21

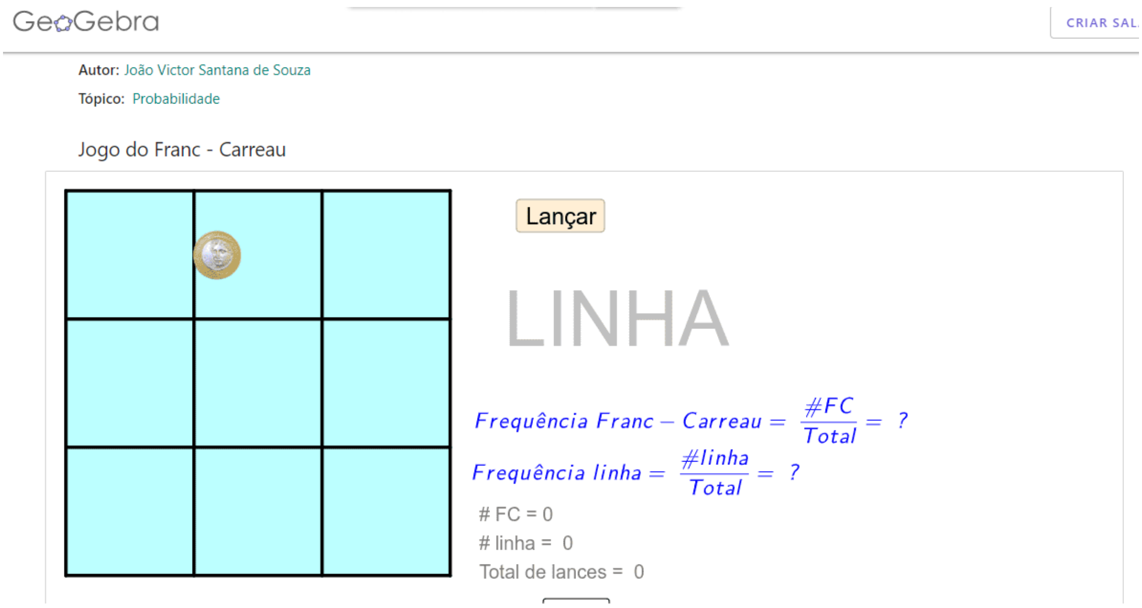
Fonte: https://www.riachaonet.com.br/portal/tipos-de-blackjack-e-sua-origem/ Acesso em: 01 nov. 2021.

4.3. Jogo *Franc Carreau* no GeoGebra

Para finalizar a sequência didática, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais, podendo fazer em um laboratório convencional de informática, com uso de *tablets* ou mesmo com utilização de aparelhos *smartphones* dos alunos.

Inicialmente, pode fazer a retomada da ideia clássica de probabilidade em que podemos trabalhar algumas coisas acerca de probabilidade com o jogo “Franc-Carreau”, dentre essas coisas, neste trabalho quero mostrar a ideia clássica e inicial de probabilidade, que é $P=\frac{n(A)}{n(espacoamostral)}$ a probabilidade comum, sem envolver as probabilidades condicionais ou a probabilidade geométrica que envolve as superfícies dos quadrados traçados no tabuleiro e da moeda.

Figura 2 – Jogo do *Franc-Carreau*



Fonte: https://www.geogebra.org/m/bwrqgxm8. Acesso em: 01 nov. 2021.

Nesse jogo a frequência *Franc – Carreau*, representada por FC é dada quando se lança a moeda e esta cai dentro do quadrado sem encostar nas linhas limitantes. Já a Frequência Linha, é dada quando se lança a moeda e esta cai exatamente em cima da inha ou encosta nela. E é apresentado também a quantidade do total de lançamentos que foram feitos. Para obter a FC dividimos o valor FC pelo total de lançamentos da moeda, assim obtemos a Frequência. E para obter a Frequência linha, dividimos o valor da quantidade de vezes que a morda caiu na linha pelo total de lançamentos.

Podemos estimar a probabilidade de se obter *Franc – Carreau*, conforme fazemos lançamentos sucessivos as frequências relativas acumuladas tendem a se estabilizar.

A tabela 1, extraída de Coutinho e Figueiredo (2020)

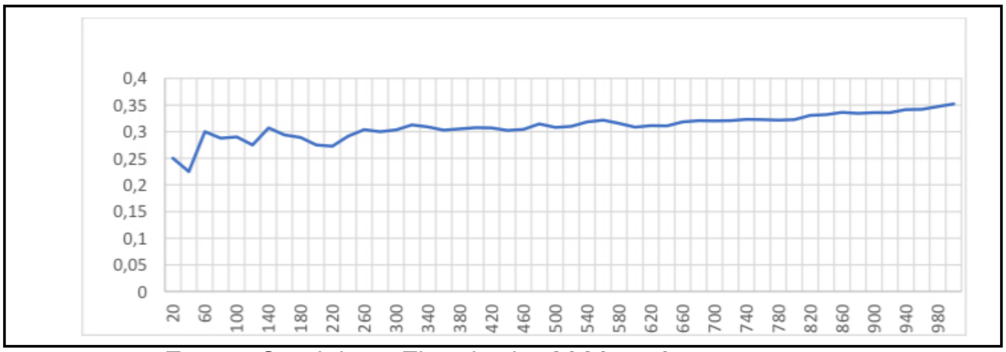
Tabela 1. Resultados da simulação de 1.000 lançamentos da moeda no jogo *franc-carreau*.

Lançamentos	Lançamentos acumulados	Sucessos	Sucessos acumulados	Frequência relativa acumulada (sucessos)
40	40	4	9	0,225
40	80	5	23	0,2875
40	120	4	33	0,275
40	160	4	47	0,29375
40	200	3	55	0,275
40	240	10	70	0,291666667
40	280	5	84	0,3
40	320	9	100	0,3125
40	360	4	109	0,302777778
40	400	7	123	0,3075
40	440	4	133	0,302272727
40	480	11	151	0,314583333
40	520	7	161	0,309615385
40	560	8	180	0,321428571
40	600	2	185	0,308333333
40	640	6	199	0,3109375
40	680	8	218	0,320588235
40	720	7	231	0,320833333
40	760	6	245	0,322368421
40	800	7	258	0,3225
40	840	8	279	0,332142857
40	880	5	294	0,334090909
40	920	7	309	0,335869565
40	960	7	328	0,341666667
40	1000	12	352	0,352

Fonte: Coutinho e Figueiredo, 2020, p. 9.

Podemos perceber melhor esse número tendendo a se estabilizar construindo um gráfico.

Figura 3 – Gráfico de frequência acumulada – 1000 lançamentos



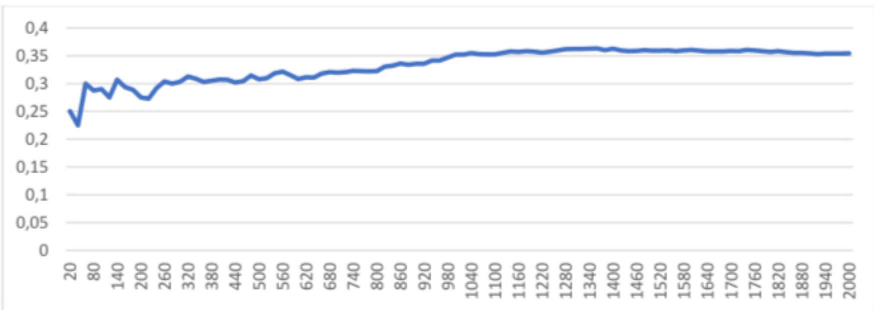
Fonte: Coutinho e Figueiredo, 2020, p. 9.

Podemos entender com este gráfico que o ele tende a se estabilizar em torno de 0,34, mas para um melhor resultado seria necessário ter mais lançamentos, o que em sala de aula nem sempre seria possível fazer.

No caso de um *software* suficientemente potente, poderíamos esperar que se efetuassem 3.000 ou mais repetições da experiência aleatória que se quer simular e mostrar os resultados. Observemos que assumir simplesmente o valor observado para a frequência relativa ao final das 1.000 repetições do experimento não mostra de fato o valor da probabilidade procurada, pois o gráfico de linha anterior indica não haver ainda estabilização suficiente para uma estimativa eficaz.

Se lançarmos a moeda mais 2.000 vezes, torna mais clara a visualização da estabilização das frequências relativas acumuladas em torno de 0,35.

Figura 4 – Gráfico de frequência acumulada – 2000 lançamentos



Fonte: Coutinho e Figueiredo, 2020, p. 10.

O experimento da pesquisa realizada indica que o mais correto a se fazer é que cada aluno realize determinado número de repetições e o professor organize a tabela somando os resultados de todos os alunos, de tal forma que atinja o maior número possível de repetições do experimento aleatório como um todo, no caso, o lançamento da moeda com verificação de sua posição dentro do quadrado após estar parada a moeda.

Podemos ver também que a simulação por meio desse applet não requer domínio do *software* GeoGebra. Porém ter o domínio do *software*, permitiria ao professor construir outras simulações para utilizar com seus alunos e facilitar o entendimento da ideia de probabilidade.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As discussões sobre o desenvolvimento da literacia probabilística e o papel da simulação informática na inserção de probabilidade no ensino da matemática suscitaram reflexões de como trazer a probabilidade cada vez mais próxima do aluno, e tentar mostrar a probabilidade acontecendo em algum software ou até mesmo no dia a dia.

Com esse trabalho pude mostrar algumas aplicações de probabilidade e principalmente como tratar a probabilidade dentro da sala de aula, quando foi abordado as três maneiras de mostrar a probabilidade, com um exercício clássico do Enem no modelo tradicional, com um jogo e cartas e com um jogo em um *software*, utilizamos algumas possibilidades de ferramentas que podem ser utilizadas para o ensino de probabilidade, o jogo de cartas pode ser usado em uma escola que muitas vezes não tem uma estrutura tão boa e não tem computadores ou projetores para que os professores possam utilizar e ensinar usando essas ferramentas, já o jogo desenvolvido no Geogebra pode ser usado em uma escola que tenha uma infraestrutura com tecnologia digital disponível para o ensino.

Embora o Jogo Franc-Carreau não precisa ser feito única e exclusivamente no computador ou no Geogebra, outros *softwares* também possibilitam o desenvolvimento deste jogo ou ainda, desenvolver manualmente nas salas de aula utilizando materiais comuns, como papelão ou até mesmo riscar no piso da sala de aula.

Deve-se notar que, como um aspecto positivo, o ambiente de computação oferece aos participantes a oportunidade de observar uma situação de amostra maior. Isso porque um grande número de experimentos na simulação pode ser realizados em um curto período de tempo. Este tipo de simulação envolve a visualização necessária para estudar a aleatoriedade e a estabilidade de frequência após um número suficientemente grande de experimentos aleatórios serem repetidos no problema de probabilidade experimental, o que nem sempre é possível em um ambiente de sala de aula tradicional.

Além disso, a simulação ajuda a criar um ambiente para discussões em sala de aula e em grupo.

Recomenda-se aos professores que entendam a utilidade de materiais didáticos adequados aos diferentes métodos de ensino e os utilizem, visando melhorar a eficiência do ensino e a probabilidade de aprendizagem, o que pode ser feito de forma agradável e divulgar suas descobertas e resultados. Enfatizamos a necessidade de mais pesquisas para esclarecer os componentes básicos da preparação dos professores para o ensino de probabilidade, bem como pesquisas que possam explicar os métodos apropriados para o ensino de cada componente.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R. *et al.* **Resolução de Problemas:** teoria e prática. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**: Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 9 jun. 2021.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares - Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC–Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares. Secretaria de Educação Fundamental.** Séries Iniciais. Brasília: MEC/SEF, v. 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CORDEIRO, K. S. C. **Uma proposta didática para o ensino de probabilidade através de jogos.** Curso de graduação em Matemática – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Curso de Graduação, 35 p., 2017.

COUTINHO, C. Q. S.; FIGUEIREDO, A. C. Simulação computacional: aspectos do ensino da probabilidade frequentista. **Revista Zetetike.** Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8656869. Acesso em: 01 nov. 2021.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio:** (Coleção do Professor de Matemática). Volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MLODINOW, L. **O Andar do Bêbado:** como o acaso determina nossas vidas. Tradução de Diego Alfaro. Tradução de: The Drunkard’s Walk. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

MORGADO, A. C. *et al*. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S.G.; Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.vol. 25, núm. 41, dez, 2011, pp. 73-98.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

REVISTA CÁLCULO: **Matemática para todos**. Doentes perfeitamente saudáveis. 31. ed. n.3. São Paulo: Editora Segmento, 2013.

SILVA, A.L.B.S. **Probabilidade no Ensino Médio e suas aplicações no cotidiano.** Dissertação (Mestrado em Matemática– UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ-UNIFAP. 63 p. 2016.

SPIEGEL, M. R. SCHILLER, J. SRINIVASAN. **Probabilidade e Estatística.** 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. (Coleção Schaum). Sociedade Brasileira de Educação Matemática.