FÁBIO DE JESUS SILVA

ROBSON DE SALES RIBEIRO

UNIVERSIDADE METROPOLITANA DE SANTOS

DEMONSTRANDO NA PRÁTICA A CURVA CICLOIDE

SANTOS - 2019

FÁBIO DE JESUS SILVA

ROBSON DE SALES RIBEIRO

UNIVERSIDADE METROPOLITANA DE SANTOS

DEMONSTRANDO NA PRÁTICA A CURVA CICLOIDE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para a obtenção do grau de Licenciando em Matemática a Universidade Metropolitana de Santos.

Orientador:Auriluci de Carvalho Figueiredo

SANTOS – 2019

FÁBIO DE JESUS SILVA

ROBSON DE SALES RIBEIRO

UNIVERSIDADE METROPOLITANA DE SANTOS

DEMONSTRANDO NA PRÁTICA A CURVA CICLOIDE

Banca Examinadora:

Professora Auriluci de Carvalho Figueiredo, Unimes

Professor Examinador, Unimes

SANTOS – 2019

DEDICATÓRIA

A minha esposa Naiara e meu filho Artur pelo grande incentivo dado a minha formação, amor, paciência e apoio nos momentos difíceis. A eles minha gratidão, amor e carinho.

Aos meus pais Maria e Nilson pelo incondicional incentivo, dedicação e compreensão.

Fábio Silva

A Deus que em meio ao desânimo e a sensação de pouca capacidade, foi a minha de fonte de inspiração, sendo meu ajudador, tornando sempre qualquer fardo mais leve.

A meus pais Maria Imaculada e José Célio por enxergar em mim algo além do que eu era, para que hoje eu possa estar colhendo mais um fruto desse esforço mútuo.

A minha esposa Alcione que através de sua compreensão e abdicação propiciou um ambiente favorável e tranquilo em nosso lar para que eu pudesse me dedicar aos projetos por noites a fim e finais de semana.

Robson Ribeiro

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus, que nos guia, protege e nos proporciona oportunidades de conhecermos pessoas que acrescentam conteúdo em nossas vidas, que nos fazem enxergar erros e apontam caminhos mais tranquilos em nossa caminhada.

Agradecemos em especial à professora Auriluci pela dedicação, confiança e consideração na orientação e realização desse trabalho.

Agradecemos a todos os professores e amigos que de alguma maneira contribuíram para que conseguíssemos alcançar esse objetivo.

EPIGRÁFE

SONHE

Seja o que você quer ser, porque você possui apenas uma vida e nela só se tem uma chance de fazer aquilo que quer.

Tenha felicidade bastante para fazê-la doce.
Dificuldades para fazê-la forte.
Tristeza para fazê-la humana.
E esperança suficiente para fazê-la feliz.

As pessoas mais felizes não têm as melhores coisas.
Elas sabem fazer o melhor das oportunidades que aparecem em seus caminhos.

A felicidade aparece para aqueles que choram.
Para aqueles que se machucam.
Para aqueles que buscam e tentam sempre.
E para aqueles que reconhecem a importância das pessoas que passam por suas vidas.

Clarice Lispector

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo fazer com que o professor consiga ensinar o conteúdo das curvas Cicloides, com ênfase na Braquistócrona e Tautócrona, utilizando uma ferramenta interativa, pratica e didática, de autoria própria que pode ser confeccionada em sala de aula pelos alunos e professores. Sendo assim, foram utilizados relatos históricos relacionados a curva cicloide, onde se destacou a importância de relacionar o ensino da matemática com todo o seu desenvolvimento e evolução, no qual buscou-se inserir a idéia de tratá-la como um objeto de conhecimento e necessidade humana. Com esse intuito e fundamentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e Fundamental, assim como na Base Nacional Comum Curricular, prosseguimos explicando a curva cicloide. Foram destacados detalhadamente os passos para a confecção do objeto a ser utilizado em sala de aula, assim como toda a teoria que o envolve.

PALAVRAS-CHAVES: Cicloide, Braquistócrona, Tautócrona,Didática**.**

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1 à 10 -Definição da área da ciclóide por Roberval...............................31 a 34
Figura 11 à 15 - Cálculo da área pelo método de Roberval ....35 a 37
Figura 16 à 21 - Definição do perímetro da ciclóide por Christiann Huygens....38 a 40
Figura 22 - Propriedades da ciclóide...41
Figura 23 à 27 - Definição de Braquistócrona ....41 a 42
Figura 28 à 30 - Definição de Tautócrona ....43 a 44
Figura 31 a 43 - Etapas de construção do material..45 a 50

LISTA DE FOTOS

Pág.

Foto 1 - Charles de Bovelles 22
Foto 2 - Galileu Galilei...22
Foto 3 - René Descartes 23
Foto 4 - Pierre de Fermat 23
Foto 5 - Evangelista Torricelli 24
Foto 6 -Gilles de Roberval...24
Foto 7 - Martin Mersenne 24
Foto 8 - Vincenzo Viviani...26
Foto 9 - Blaise Pascal 26
Foto 10 - Cristhian Huygens..26
Foto 11 - Christopher Wren 27
Foto 12 - Isaac Newton 27
Foto 13 - Jakob Bernoulli 27
Foto 14 - Johann Bernouli 27
Foto 15 - Niels Henrik Abel..27

LISTA DE QUADROS

Pág.

Quadro 1 - Trabalhos pesquisados sobre o tema 17

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 10

CAPÍTULO 1 – JUSTIFICATIVA E PROBLEMÁTICA 12

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 15

CAPÍTULO 3 – PESQUISADORES E MATEMÁTICOS QUE CONTRIBUIRAM PARA O ESTUDO DA CICLOIDE 21

CAPÍTULO 4 – MÉTODOS E CAMINHOS 28

CAPÍTULO 5 – O OBJETO MATEMÁTICO CICLOIDE. 30

5.1 – Conceito da Curva Cicloide. 30

5.1.1 - Cálculo do perímetro da cicloide 36

5.1.2 - Propriedades da curva cicloide 39

5.2 – A Construção do Material Pedagógico 42

CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS 50

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 52

INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo apresentar uma didática diferente para o ensino do conteúdo da curva Cicloide, o intuito é de oferecer ao professor uma ferramenta didática de autoria própria, que pode levar a aula para um caminho em que os alunos também se percebam participantes, favorecendo com que se concentrem, entendam e visualizem o que esta sendo estudado. Essa ferramenta didática é de fácil confecção e permite que o aluno a confeccione em conjunto com os demais alunos e professores, sendo essa fase de construção de grande importância para a interação e ajuda mútua entre os participantes.

O interesse não é só ensinar o conteúdo de uma forma diferenciada, mas também ensiná-lo usando a história da matemática, levando o aluno reconhecer que tudo que criamos é para suprir nossas necessidades humanas, e que a Cicloide não foi a descoberta de um só autor, mas se complementou através dos estudos de vários autores que dispuseram de muito tempo de sua vida para descobrir suas propriedades.

No capítulo 1 apresentamos a justificativa da escolha do nosso tema, usando como referência os autores Silva at. al. (2010), Garbi (1991), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), assim como a problemática que envolve nosso trabalho.

No capítulo 2 apresentamos a revisão bibliográfica fundamentadas em Santos et. al. (2013) para elaboração do contexto do uso da história matemática como ferramenta de ensino para o conteúdo de matemática em sala de aula; em Lima et. al. (2012) como fundamentação do estudo das propriedades da curva cicloide e a utilização de ferramentas computacionais, como o Geogebra e o Maxima; em Pedroso e Precioso (2014) como fundamentação do uso dos aspectos históricos sobre a Cicloide; em Grande (2015) como fundamentação teórica da cicloide, utilizando o software Geogebra como recurso computacional auxiliar; em Lopes e Alves (2014) como fundamentação do recurso de implementação de atividades com a utilização da história da evolução matemática; a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

No capítulo 3 apresentamos os aspectos históricos da curva cicloide, onde o objetivo foi mostrar toda a história que a envolve, quais os autores que contribuíram para seu estudo e o que cada autor conseguiu descobrir em seus trabalhos.

No capítulo 4 apresentamos quais os métodos e caminhos que utilizamos fundamentados em Silva at. al.(2010) e Gil (1991) para contextualizar a escolha de pesquisa que utilizamos.

No capítulo 5 apresentamos o objeto matemático Cicloide, como o conceito da curva Cicloide e as etapas de construção do material pedagógico, assim como os argumentos para fundamentar a pratica da ferramenta didática.

Por fim, no capítulo 6, apresentamos as considerações finais do nosso trabalho, destacando as contribuições para o ensino e aprendizagem da curva cicloide em sala de aula.

CAPÍTULO 1 – JUSTIFICATIVA E PROBLEMÁTICA

O interesse foi criar um trabalho que tem como propósito fazer com que o professor consiga ensinar a curva Cicloide, com ênfase na Braquistócrona e Tautócrona, com o auxilio de uma ferramenta interativa, pratica e didática. A idéia se deu através das formações adquiridas ao longo da nossa vida acadêmica, com os cursos profissionalizantes e cursos técnicos na área de manutenção elétrica, mecânica e automação, que nos possibilitaram trabalhar nessas áreas na indústria e que nos abriu novos horizontes em relação ao conteúdo que aprendemos em sala de aula, com a prática exercida.

Durante esse período de aprendizado dos cursos, percebemos que a matemática sempre esteve presente, e que era base para todos os cursos que havíamos feito, dentre eles todos tinham alguma fórmula matemática incluída em algum conteúdo ou aula prática dada, e entender a teoria do que era dado sem relacionar com algo a ser a ser aplicado era problemático.

No segundo semestre do curso de licenciatura em matemática, a professora Dra. Auriluci de Carvalho Figueiredo, nos passou a tarefa de ler o livro ‘’ O Romance das Equações Algébricas’’, em que cada aluno ficou responsável por apresentar um capítulo do livro, e nos coube falar sobre o capítulo XXIII. Este capítulo tratava dos feitos de Arquimedes em calcular a área e o volume de uma esfera, feitos que lhe trouxeram grande satisfação a ponto de manifestar o desejo de após sua morte, ter gravado sobre seu túmulo os desenhos de um cilindro, uma esfera e um cone, e por volta de 75 A.C, teve esse desejo satisfeito.

Também no capitulo XXIII, Blaise Pascal demonstra sua genialidade, comprovando através de puro raciocínio lógico os feitos e métodos práticos com que Arquimedes determinou a área e o volume da esfera, comprovando de outra forma que Arquimedes estava correto. O interesse pelo estudo da cicloide foi despertado ao final do livro, onde as peculiaridades da cicloide foram demonstradas com ênfase.

Esse nosso tema esta de acordo com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), que recomendam a grande importância do professor ter acesso a maneiras de produção de conhecimento e sugerem também que é papel da escola apoiá-lo na busca de um atualizado processo de ensino aprendizado, ressaltando:

> O acesso aos conhecimentos produzidos pela investigação acadêmica, nas diferentes áreas, possibilita manter-se atualizado e competente para fazer opções de conteúdos, metodologias e organização didática do que ensina. (PCNEM, p.143)

Nosso propósito é fazer com que a experiência que tivemos de conseguir relacionar o que aprendemos na teoria com a prática, também faça parte do ensino de curvas cicloides ensinadas em sala de aula, trabalhando com uma ferramenta didática, a qual possibilita com que o professor passe o conteúdo e o aluno consiga entender, visualizar e participar da aula.

Essa ferramenta didática é de autoria própria e consiste em demonstrar de forma prática o movimento que constrói a curva cicloide. O intuito foi elaborar um objeto de modo que os recursos necessários a serem utilizados sejam baratos e fácil de encontrá-los, o objetivo é utilizá-lo como ferramenta didática em sala de aula, este objeto é de simples confecção e a idéia é que os alunos ajudem a fazê-lo junto ao professor.

Seguindo esta linha de pensamento, os PCNEM ressaltam que é de fundamental importância que os alunos também se sintam parte do processo de ensino aprendizagem, os envolvendo e inserindo-os dentro do plano de aula, fazendo com que sejam capazes de ter maior concentração e foco do conteúdo que esta sendo ensinado, da seguinte maneira:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. (PCNEM, p.112)

Conforme íamos nos aprofundando na pesquisa da curva Cicloide, pudemos entender o quanto que o desenvolvimento de seus estudos foi de extrema importância em diversas áreas de conhecimento, observando a quantidade de tempo que cada autor se desprendeu para estudá-la, o quanto esses estudos contribuíram para o avanço da tecnologia que temos hoje, e acabou nos mostrando que através da curiosidade de alguns poucos homens intrigados com as peculiaridades dessa curva, que por hora seria algo simples, viriam soluções para as mais complexas estruturas tecnológicas.

Nosso propósito também é ajudar o aluno que não consegue compreender o conteúdo, colocando-o como elemento essencial para aprendizagem, fazendo com que ele se envolva, participe e absorva o que foi dado em sala de aula, é tentar fazê-lo enxergar que aquilo que se aprende em um ambiente educacional pode ser levado para outras áreas e aplicado de variadas formas em seu cotidiano.

Ou seja, é necessário também que a escola abra caminhos para que este tipo de aprendizagem aconteça, partindo dessa idéia os PCNEM ressaltam:

> Quando a escola promove uma condição de aprendizado em que há entusiasmo nos fazeres, paixão nos desafios, cooperação entre os partícipes, ética nos procedimentos, esta construindo a cidadania em sua prática, dando as condições para a formação dos valores humanos fundamentais, que são centrais entre os objetivos da educação. (PCNEM, p.55)

Tendo como base do desenvolvimento do nosso tema a história da matemática, onde destacamos a importância de relacionar o ensino da matemática com todo o seu desenvolvimento e evolução, a tratando como um objeto de conhecimento e necessidade humana, sempre destacando que usar a história da matemática em aula pode ser uma ferramenta de entendimento do conteúdo. Decidimos colocar o contexto histórico da Cicloide em nosso trabalho, apresentando os autores que contribuíram para os estudos de suas propriedades e como aplicá-las.

Para que não fique um trabalho apenas de dados, mas que passe para os interessados um entendimento mais completo e humano do conteúdo, buscamos mostrar quanto tempo cada um desses autores se dispuseram para esse estudo e o quanto a participação de cada um deles foi e é importante para a descoberta de novas ideias.

Dessa maneira, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que sugerem um resgate histórico no ensino de diversos conteúdos da matemática, ressaltando sobre a história da matemática que:

> , Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. (PCNs, p.23)

Isso nos mostrou que também somos capazes de conseguir ajudar a melhorar a aprendizagem, nos espelhando nos grandes pesquisadores da Cicloide, que mesmo com vários anos dedicados a descobrir suas propriedades, nunca desistiram de buscar soluções para seus problemas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este trabalho foi elaborado com base nos artigos de autores que dedicaram horas de estudos para obter uma forte fundamentação dos temas estudados sobre a curva Cicloide, conforme o quadro abaixo está relacionado os autores e seu objeto de estudo.

Quadro 1: Trabalhos pesquisados sobre o tema.

Autores	Tema
Anderson Oramisio Santos Camila Rezende Oliveira Guilherme Saramago de Oliveira	Contribuições para o ensino da matemática no ensino fundamental, através da história da matemática e PCN's.
Lariza Conceição Castro Lima Paulo Augusto Souza Pimentel Hugo Alex Carneiro Diniz	A cicloide e o problema histórico da Braquistócrona.
André Lúcio Grande	O estudo da cicloide utilizando o software Geogebra.
Lidiane Schimitz Lopes Antônio Maurício Medeiros Alves	A história da matemática em sala de aula: propostas de atividades para a educação básica.
Hermes A. Pedroso Juliana C. Precioso	Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuição.

Fonte: Elaborado pelos autores

A matemática é um conhecimento socialmente construído, ou seja, é uma construção de ideias fruto de uma necessidade humana. Falar em história da matemática é mostrar que a matemática foi formada por um conjunto de pessoas em uma determinada época, que tinha uma determinada cultura e uma determinada filosofia de vida, e que ela sempre foi presente na resolução de problemas práticos da vida cotidiana.

Dessa maneira, utilizar a história da matemática como ferramenta do ensino da matemática é auxiliar no transpor didático, em conjunto com a incorporação de novas metodologias em sala de aula, no pensar da elaboração de atividades para construção de conceitos pelo aluno, pensando sempre em que medidas os elementos da história da matemática podem auxiliar a prática ou produzir novas atividades no ensino.

> A Transposição Didática, em um sentido restrito, pode ser entendida como a passagem do saber científico ao saber ensinado. Tal passagem, entretanto, não deve ser compreendida como a transposição do saber no sentido restrito do termo: apenas uma mudança de lugar. Supõe-se essa passagem como um processo de transformação do saber, que se torna outro em relação ao saber destinado a ensinar. (Santos at. al, 2013, p.8).

Santos et. al. (2013), trazem a discussão que a matemática vem inovando seu modo de ensinar, para que os professores tenham novas maneiras de transmitir o conhecimento matemático, a partir dos princípios de que a matemática faz parte do cotidiano ao longo da evolução histórica da humanidade. Estes autores em relação a história da matemática, enfatizam que seja um grande desafio a ser enfrentado pelo professor, o de redimensionar o objeto de conhecimento (o objeto de estudo, o objeto de ensino) ao "transpô-lo" de uma prática discursiva para outra, ou seja, tratar o conhecimento levando em consideração a mudança da situação discursiva.

Contudo os autores destacam que cabe ao professor utilizar as informações históricas, procurando estabelecer conexões com os aspectos construtivos dos conceitos matemáticos ligados a tais informações, pois contribuirá para que o professor compreenda algumas dificuldades dos alunos.

Santos et. al. (2013) defendem que para tentar administrar as discussões é necessário atentar-se que o movimento da transposição didática surge da dificuldade ou necessidade das escolas interagirem com as ciências, diante a rapidez da informação do conhecimento do saber, levando em consideração a localidade e o contexto social que a circunda, e diante dessa realidade buscar meios para que a escola não fique fora da realidade científica que a cerca.

Levar em consideração todo o contexto em que o aluno esta inserido é de fundamental importância para a prática do ensino da matemática, pois ao conhecer a realidade que ele traz consigo fica com maior sentido o aprender, por que suas necessidades acabam sendo objeto de estudo, fazendo com que desperte um interesse maior do aluno e a participação fique mais espontânea.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), onde ressalta que é de fundamental importância compreender que a construção do conhecimento matemático faz parte de um processo histórico, que leva em conta as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época. Nota-se que os parâmetros mostram que a matemática, foi construída para resolver problemas de ordem prática, por problemas vinculados a outras ciências, bem como por problemas relacionados a investigações internas a própria matemática. Os parâmetros destacam que o recurso de utilizar a história da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, contribuindo para a construção de um olhar mais critico sobre os objetos de conhecimento.

Segundo os parâmetros deve-se considerar que para aprender certo conceito ou procedimento, é de fundamental importância haver um contexto significativo para os alunos, como a utilização da história da matemática, para que eles desenvolvam a capacidade de abstração, os auxiliando no esclarecimento de ideias matemáticas que estão sendo construídas pelos alunos, dando respostas a algumas interrogações.

Consequentemente dar importância a história da matemática como ferramenta de ensino, é torná-la parte do processo de aprendizagem, sabendo que sua contribuição para o aprendizado é relevante e faz parte de todo um processo em que varias disciplinas convergem para a busca de um entendimento mais natural da matemática.

> A partir daí, emerge entre os estudiosos a ideia de que a História da Matemática não pode e nem deve constituir apenas mais uma disciplina isolada das outras. Este isolamento acabaria por formar uma divisão racional entre Matemática e História da Matemática, bem como, a oposição entre o lógico e o histórico.(SANTOS AT AL, 2013, p.14)

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), segundo sua proposta ressalta que a matemática é uma ciência viva que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos, que serve como alicerce para descobertas e construções, capaz de desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes.

A BNCC destaca que se deve também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática.

Lopes e Alves (2014) em seu trabalho tiveram como objetivo de implementar atividades para alguns conteúdos do ensino Fundamental e Médio por meio de um minicurso visando preparar professores de matemática para contar a história que originou a evolução dos assuntos ligados a matemática.

Para desenvolver o ideal proposto pelo minicurso Lopes e Alves (2014) iniciaram com um texto que relaciona os saberes matemáticos com a cultura e as necessidades do homem, de modo que se relacione o desenvolvimento social e econômico de cada época da história, com as descobertas matemáticas que foram frutos dos anseios da sociedade em questão.

Após introduzir alguns conceitos que reforçam os benefícios de se contextualizar a história da matemática, os autores propuseram uma série de atividades que empregam diferentes meios de resolução de acordo com cada época para demonstrar na prática a forma com a qual os matemáticos resolviam os problemas. Por meio dessas atividades se pode identificar os recursos e o quanto que as pesquisas na área da matemática foram importantes para o desenvolvimento teórico e tecnológico que está ciência tem hoje.

Como resultado, esperou-se que os participantes compreendessem que o contexto histórico é um aliado para se conceber no aluno a ideia de que matemática é uma ciência em construção, e que precisa ser trabalhada hoje, para que possa atender e acompanhar as necessidades evolutivas da sociedade.

De acordo com uma pesquisa de Grande (2015) que tem por objetivo estudar algumas propriedades geométricas da curva plana denominada cicloide utilizando o software GeoGebra como recurso computacional auxiliar, e a partir de sua construção elaborar algumas conjecturas sobre suas características geométricas no sentido de procurar formalizar suas equações paramétricas.

GeoGebra permite a utilização de conceitos da mecânica, geometria e álgebra, para simular a questão do movimento, de um ponto de vista dinâmico e não estático, também o estudo dos objetos matemáticos procurando explorar o raciocínio intuitivo dos alunos por meio da elaboração de conjecturas e hipóteses de modo interativo e dinâmico, promovendo uma inter-relação entre as representações algébricas, gráfica e geométrica do objeto matemático.

Como procedimentos metodológicos Grande (2015) realiza inicialmente um estudo da cicloide utilizando-se o software GeoGebra de uma maneira intuitiva objetivando estabelecer algumas conjecturas para se deduzir suas equações paramétricas.

A fundamentação teórica da cicloide é dada a partir de uma curva obtida como trajetória de um ponto P(x,y) localizada numa circunferência de raio "r" que gira sobre o eixo "Ox" sem escorregar. No entanto Grande (2015) pode constatar no desenvolvimento da pesquisa que o software GeoGebra trás inúmeros benefícios ao aprendizado, pois na construção e no desenvolvimento de atividades em sua interface pode-se instantaneamente visualizar o resultado de uma alteração em um determinado ponto da equação que constrói a curva cicloide, que é o objeto de estudo em questão.

Toda essa facilidade e rapidez que o GeoGebra possibilita traz muitos benefícios para um aprendizado mais rápido, atual e intuitivo.

Para Lima et. al. (2012), que tiveram como objetivo apresentar um estudo sobre a cicloide, onde estudaram algumas de suas propriedades, utilizaram ferramentas computacionais, como o Geogebra para a construção da curva e o Maxima para análise numérica. Estes autores tiveram como foco explicar o problema histórico da Braquistócrona, que é o de encontrar o caminho mais rápido entre dois pontos, e o da Tautócrona, que foi o de encontrar a curva cujo tempo de queda de um objeto seja sempre o mesmo independentemente da altura.

Os autores no caso do experimento relativo à braquistócrona usaram tiras de borracha, para fazer as curvas, esferas maciças para simular os deslize da partícula e o compensado como base de apoio. De acordo com os autores uma das soluções para o problema da Braquisócrona e da Tautócrona foi obtida através do Princípio de Fermat, que percebeu que a luz percorre sempre o caminho com o menor tempo possível, outra resposta obtida pelos autores foi através da criação do experimento prático, que compara o tempo de queda de três curvas: uma curva qualquer, uma reta e a cicloide.

Segundo os autores os resultados obtidos concluíram que a cicloide é realmente a curva com menor tempo de queda, o uso de artifícios computacionais é um diferencial que traz análises numéricas de diversas curvas em relação à cicloide e que o experimento prático contribuiu para a formação de conceitos.

CAPÍTULO 3 – PESQUISADORES E MATEMÁTICOS QUE CONTRIBUIRAM PARA O ESTUDO DA CICLOIDE

As descobertas matemáticas vieram da necessidade humana de entender fenômenos e solucionar problemas. A intenção deste capítulo é mostrar esta parte histórica da matemática, para que o entendimento do assunto abordado se torne mais humano, mostrar que a cicloide como em vários conteúdos matemáticos, não foi a descoberta de um só autor, mas a contribuição de outros vários autores que dispuseram de muito tempo de sua vida para conseguir achar as soluções corretas e fortificar o objeto de estudo.

Abaixo estão relacionados os autores que contribuíram para o estudo da cicloide, de acordo com a linha do tempo.

Autor	Contribuição para o estudo da Cicloide
Charles de Bovelles (1479 - 1566)  Foto 1 Fonte: Site Wikimedia, 2011 Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk	A cicloide foi percebida pela primeira vez pelo francês, Charles Bovelles, que num trabalho de geometria publicado em Paris, em 1501, se refere a essa curva ligando-a com o problema da quadratura do círculo.
Galileu Galilei (1564 - 1642)  Foto 2 Fonte: Site Wikimedia, 2008 Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk	O nome cicloide foi dado por Galileu Galilei no século XVII. Conta-se que em certo dia, na Catedral, ele se deparou com um lustre suspenso na abóboda e observou a lâmpada oscilando de um lado a outro. Usando as batidas de seu pulso para medir o tempo que a lâmpada levava nesse trajeto, ele começou o estudo que o levou ao pêndulo. Hoje, esse estudo é utilizado em assuntos relativos à força peso e ao movimento oscilatório. Galileu se interessava em comparar velocidades,

tempos e distâncias para o movimento ao longo de planos inclinados, bem como para a queda livre. Assim, ele apresentou um postulado dizendo que a velocidade adquirida por um objeto deslizando por um plano inclinado, sem atrito, depende somente da altura do plano e não do ângulo de inclinação.

Galileu deduz resultados semelhantes sobre o tempo de queda de um determinado objeto ao longo de dois planos inclinados distintos, de mesma altura, que estão entre si na proporção inversa das raízes quadradas de suas respectivas alturas. Também tentou encontrar a área sob um arco de cicloide, não obtendo sucesso.

Porém, chamou a atenção dos matemáticos para esta curva, recomendando o estudo de suas propriedades e o indicou para ser usado em construções de pontes. Foi Galileu quem batizou a curva como cicloide.

René Descartes
(1596 - 1650)

Foto 3
Fonte: Site Wikimedia, 2007
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Em 1638, René Descartes desafia seus contemporâneos a determinar a tangente em um ponto qualquer da cicloide.

Pierre de Fermat
(1601 - 1665)

Foto 4
Fonte: Site Wikimedia, 2011
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Pierre de Fermat aceitou o desafio e resolveu o problema sem muita dificuldade: seu método, mais amplo, atingiu diretamente o objetivo, mesmo nesse caso, em que se tratava de uma curva "mecânica" ou "transcendente" como hoje diríamos.

Evangelista Torricelli
(1608 – 1647)

Foto 5
Fonte: Site Wikmedia, 2005
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Torricelli interessou-se pela cicloide, por sugestão de Mersenne e Galilleu, os quais admiravam. Em 1644, Torricelli publicou sua obra intitulada de "Parabole", a qual inclui tanto a quadratura da cicloide, quanto a construção da tangente.

Gilles de Roberval
(1602 - 1675)

Foto 6
Fonte: Site Wikimedia, 2005
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Gilles Personne nasceu em Roberval e adotou o nome senhoril de Roberval. Quando chegou a Paris, Marin Mersenne , um religioso que pertencia a Ordem dos Mínimos, propôs-lhe que estudasse a curva cicloide. Assim, Roberval em seus estudos encontrou o volume gerado quando a área da cicloide gira em uma reta. Ele denominou a cicloide como Trocoide, que é o plano da curva descrito por um ponto ligado a um círculo gerador, que rola sobre uma reta. A palavra vem da raiz grega trokos, significa roda.Roberval, que até então não havia publicado seu trabalho, acusou Torricelli de plágio, o que não seria verdade, visto que seus trabalhos foram independentes, embora Roberval o tenha feito primeiro.

Martin Mersenne
(1588-1648)

Foto 7
Fonte: Site Wikimedia, 2008
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Em 1630, Marin Mersenne desafiou Descartes, Fermat e outros matemáticos, com problemas relativos à curva cicloide, que passou a ser discutida e, consequentemente, recebeu o apelido de "Helena dos Geômetras".

Foi um padre francês que admirava as obras de Galileu e que sabia dos problemas deste com a Igreja.

e das dificuldades dele em divulgar sua obra na Itália, trouxe os trabalhos do italiano para Paris. Centrados em Mersenne havia um grande círculo de matemáticos, e ele realizava regularmente reuniões para discutir novas ideias na Matemática e na Física.

Mersenne fazia registros de descobertas e correspondências e, concomitantemente, copiava-os e os distribuía para serem lidos. Em 1627, Roberval chega a Paris e se junta ao grupo de Mersenne, que reconhece seu talento e o incentiva a trabalhar com a cicloide. Mersenne também foi orientador dos estudos de Christiaan Huygens durante muito tempo, através de correspondências com Constantin Huygens – pai e educador – sugerindo os temas para investigações, tendo inclusive, sugerido o pêndulo como mecanismo para o primeiro relógio construído por Huygens.

Mersenne estudou a cicloide, não obtendo sucesso na questão do centro de oscilação de um corpo vibrando, propôs então o problema da cicloide a Huygens, através de uma carta, que também enviou a Torricelli.

Mersenne teve dificuldades quando tentou verificar as afirmações de Galileu a respeito da queda livre. Primeiro quis encontrar o comprimento do pêndulo que completasse o balanço (de um lado para o outro) em um segundo e, então, usá-locomo um cronômetro para determinar a distância percorrida em um segundo, por um corpo, em queda livre. Não ficou satisfeito com os valores que encontrou, pois sabia que a vibração variava porque o pêndulo não era verdadeiramente isócrono e estava sujeito a resistência do ar.

Após a morte de Mersenne foram encontradas, em seus aposentos, cartas de setenta e oito correspondentes, entre eles, Fermat, Huygens, Galileu e Torricelli. Havia também diversos instrumentos de Física e trabalhos que foram publicados em 1651. Mais tarde foram publicadas as cartas que Mersenne enviou e recebeu dos eruditos. Essas correspondências trazem uma visão do que foi a ciência no século XVII e mostram que Mersenne estava ciente dos assuntos que interessavam os cientistas.

Vincenzo Viviani
(1622 - 1703)

Foto 8
Fonte: Site Wikimedia, 2011
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Dentre seus feitos, destacam-se a determinação da tangente da cicloide.

Blaise Pascal
(1623 - 1662)

Foto 9
Fonte: Site Wikimedia, 2008
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Blaise Pascal que em 1658, resolveu estudar um pouco sobre a cicloide. Achou áreas, volumes e centros de gravidade da curva. E propôs aos matemáticos de sua época questões sobre a curva, prometendo prêmios para os que solucionassem os testes. Roberval foi um dos juízes. Contudo, somente duas soluções foram resolvidas pelos participantes e mesmo assim com alguns erros de cálculos. Com isso, Pascal resolveu que ninguém levaria os prêmios. Mais tarde, ele publicou as respostas dos testes em livros, como “Lettres de A”.

Christiaan Huygens
(1629 – 1695)

Foto 10
Fonte: Site Wikmedia 2005
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

A partir de seus estudos sobre o pêndulo, Huygens provou geometricamente que a Tautócrona é uma curva cicloide. Além disso, também provou que a evolutada cicloide é a própria cicloide.

Sabendo da propriedade da Tautócrona, Huygens ainda construiu um relógio de maior precisão, o que contribuiu para as navegações - na localização dos navios nas longitudes. Patenteou então o relógio como criação sua, embora o relógio de pêndulo convencional tenha sido criado por Galileu.

Christopher Wren
(1632 - 1723)

Foto 11
Fonte: Site Wikimedia, 2011
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Conta-se que o matemático Christopher Wren respondeu aos testes, inclusive conseguiu provar que o comprimento do arco da cicloide é oito vezes o raio do círculo que a gera, porém ele não estava participando da competição.

Isaac Newton
(1642 – 1727)

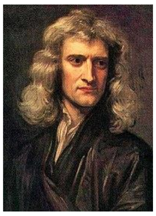


Foto 12
Fonte: Site Wikimedia 2005
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

A cicloide tem tantas propriedades bonitas e interessantes e gerou tantas controvérsias que foi chamada 'a Helena da geometria' ou 'o pomo da discórdia'. Essas controvérsias surgiram com o problema da Braquistócrona. Diversas soluções foram dadas, dentre elas esta a solução de Newton, que apresentou sua resposta como autor anônimo, porém quando Johann Bernoulli leu sua solução e disse: "... pelas pegadas se reconhece a fera".

Jakob Bernoulli
(1654 – 1705)

Foto 12
Fonte: Site Wikimedia, 2005
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Estudaram a curva do menor tempo sendo ela denominada braquistócrona, que pode ser definida como segue. Dado dois pontos num plano vertical, a alturas diferentes, é a trajetória que uma partícula material deve seguir no plano para ir do ponto mais alto, ao ponto mais baixo no menor espaço de tempo possível.

Johann Bernouli
(1667 - 1748)

Foto 13
Fonte: Site Wikimedia, 2007
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Jacob Bernoulli nasceu na Basiléia (Suíça), em 27 de dezembro de 1654. Primeiro estudou Teologia, e depois contra a vontade de seu pai, Matemática. Foi o primeiro da família a atingir alguma reputação nesse campo. Jacob viajou pela França, Holanda, Bélgica e Inglaterra com o propósito de devotar seu tempo para os estudos e tornar-se um erudito. No retorno à sua terra natal, em 1683, foi nomeado como professor de Física, na Universidade da Basiléia.

Jacob Bernoulli descobriu também um método geral para determinar evolutas de uma curva como o envelope de suas circunferências.

Ele e o irmão Johann estudaram juntos os primeiros trabalhos de Leibniz, porém, entre eles havia disputas de vaidades matemáticas e o problema da Braquistócrona foi uma delas – Johann propôs o problema na Acta Eruditorum, em 1696, e Jacob respondeu ao desafio, e foi esta a solução publicada na mesma revista.

Johann Bernoulli nasceu no dia 27 de julho de 1667, na Basiléia (Suíça), era o décimo filho de Nicolaus e Margaretha Bernoulli e irmão de Jacob, 12 anos mais velho. O desejo de seu pai era de que seguisse a carreira empresarial, contudo o filho não obteve sucesso. Quanto a sua educação, frequentou a Universidade da Basiléia, cursando Medicina, influenciado por seu irmão Jacob, que dava aulas de Física na Universidade da Basiléia, começou a desenvolver seu gosto pela Matemática, dedicando-se, principalmente, aos estudos realizados por Leibniz sobre Cálculo.

Johann desenvolveu as técnicas de Leibniz com mais detalhes em vários artigos nos anos de 1690, o que lhe proporcionou, através da ajuda de Huygens, uma cadeira de Matemática, em 1695, na Universidade de Gröningen, na Holanda. Propôs o problema da Braquistócrona em junho 1696 e desafiou Jacob.

Niels Henrik Abel
(1802 - 1829)

Foto 15
Fonte: Site Wikimedia, 2007
Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Suas primeiras pesquisas foram publicadas em 1823, e incluía sua solução do problema clássico da tautócrona, por meio de uma equação integral que agora leva seu nome, essa foi a primeira solução de uma equação desse tipo, sendo o primeiro sinal de um amplo desenvolvimento das equações integrais no fim do século XIX e começo XX. Abel também provou que a equação de quinto grau não podia ser resolvida por radicais, e portanto resolveu um problema que ocupou os matemáticos por 300 anos.

CAPÍTULO 4 – MÉTODOS E CAMINHOS

Em nosso trabalho utilizamos a metodologia de pesquisa de caráter exploratória e bibliográfica, com abordagem qualitativa. Resolvemos elaborar esta pesquisa com o propósito de encontrar fundamentos para fortalecer a nossa problemática, que tem como finalidade fazer com que o professor use a transposição didática como formar de facilitar a aprendizagem do estudo das Cicloides em sala de aula, utilizando um projeto didático elaborado por nós como forma de facilitar o processo de aprendizagem desse conteúdo.

A ideia de escolher a cicloide como tema de objeto de pesquisa, se deu através da leitura do livro "Romance das equações algébricas", que no final do capitulo XXIII, demonstra as peculiaridades, o encantamento e a grande importância que esta curva tem para a solução de alguns outros questionamentos matemáticos e físicos de difícil solução.

Diante dessa perspectiva, coletamos dados através de pesquisas em artigos acadêmicos, documentos oficiais como os PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e a BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Silva at. al. (2010), em seu livro destacam que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, estes autores ressaltam que interpretar fenômenos e atribuir significados em um processo de pesquisa qualitativa é o básico para iniciá-la. Segundo os autores o ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados, sendo o processo e seu significado focos principais de abordagem.

Assim sendo, do ponto de vista dos nossos objetivos nosso trabalho será calçado na pesquisa exploratória, como sugestão do próprio autor que diz:

> Pesquisa Exploratória: objetiva a maior familiaridade com o problema, tornando-o explícito, ou à construção de hipóteses.
> Envolve levantamento bibliográfico; entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; análise de exemplos que estimulem a compreensão. Assume, em geral, as formas de Pesquisas Bibliográficas e Estudos de Caso. (Silva at. al,2010,apud Gil 1991,p.28)

Já do ponto de vista dos procedimentos técnicos nos baseamos na pesquisa bibliográfica, consultando artigos que nos contassem sobre a Cicloide e o Problema

Histórico da Braquistócrona, Contribuição da Historia da Matemática para o Ensino da Matemática, o uso de Ferramentas Computacionais para o ensino da Cicloide e os documentos oficiais como o PCNs e a BNCC.

Segundo Silva at. al. (2010) e Gil (1991), onde destacam que uma pesquisa é de caráter bibliográfico quando ela é feita através de matéria já publicado, constituído principalmente de livros, artigos de periódicos e materiais disponibilizados na internet.

Num primeiro momento a ideia era mostrar para o professor a importância de usar em sala de aula a historia da matemática, como ferramenta de ensinar a matemática, e relacioná-la ao nosso objeto de estudo a Cicloide.

Partindo desses princípios inserindo a ferramenta que criamos para ensinar cicloide, mostrando como seria uma aula com esse tipo de objeto, quais os benefícios adquiridos em uma aula utilizando tanto nosso projeto, quantos artifícios computacionais, com o objetivo de sempre utilizar a transposição didática e colocá-la como foco do nosso trabalho.

CAPÍTULO 5 – O OBJETO MATEMÁTICO CICLOIDE.

5.1 – Conceito da Curva Cicloide.

Galileu Galilei nasceu em 1564 na Itália e foi o primeiro cientista a perceber rastro da curva gerada pelo movimento de evolução que a roda de uma charrete deixa ao girar sem deslizar. Ele denominou a curva de cicloide e também concluiu que a sua área é exatamente três vezes a área do círculo que a gera.

Essa definição da área da cicloide posteriormente foi demonstrada de uma forma brilhante por Roberval. Assim como Galileu, Roberval também conseguiu chegar à conclusão de que as áreas em verde são iguais e que a área em amarelo tem a mesma medida que uma das áreas em verde, logo a área da cicloide é três vezes a área do circulo que a gera, como podemos ver na figura a seguir:

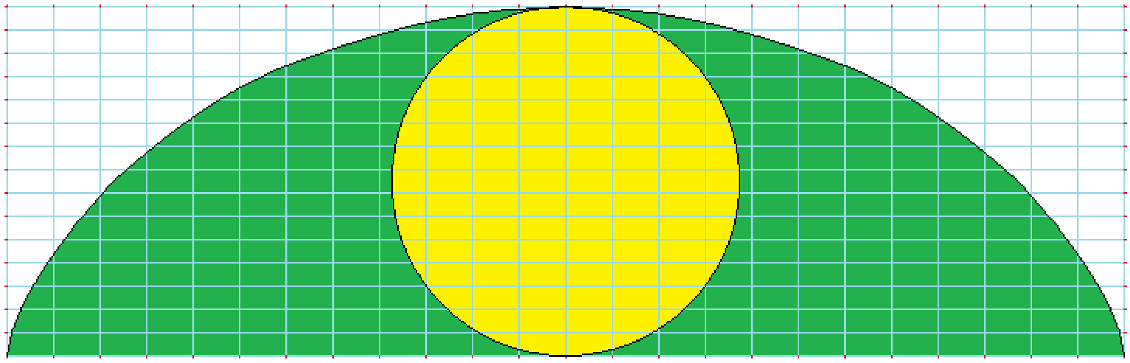


Figura 14
Fonte: Elaborado pelos autores

Mas como foi dito o método de Roberval para demonstrar a área da curva cicloide é brilhante e bem intuitivo, sendo exemplificado nas seguintes etapas:

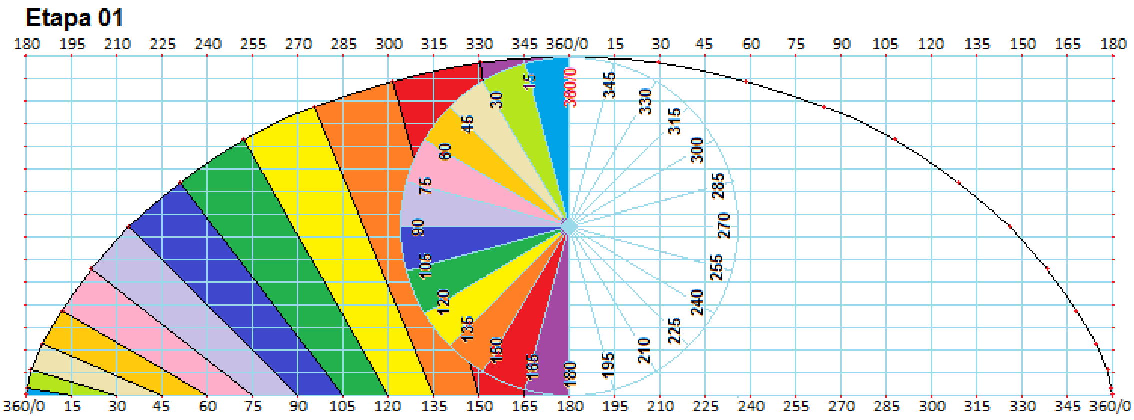


Figura 2
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 01: sabe-se que qualquer círculo tem 360º, sendo que a cicloide é gerada por um círculo que gira uma volta completa sem deslizar, logo, ao girar 180º esse círculo constrói apenas metade de uma cicloide.

Figura 3
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 02: as duas metades estão associadas, logo Roberval posicionou as duas formas geométricas nesta concepção para que se pudesse analisar e extrair algum resultado.

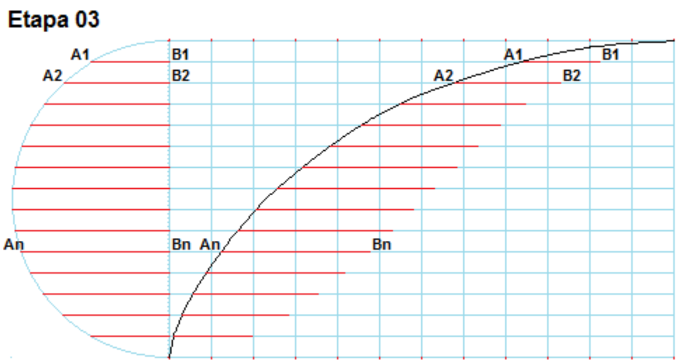
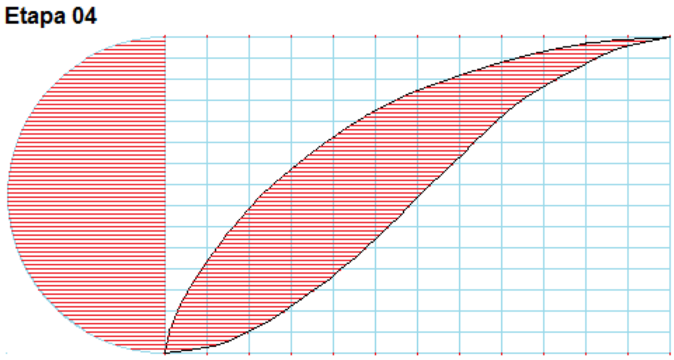


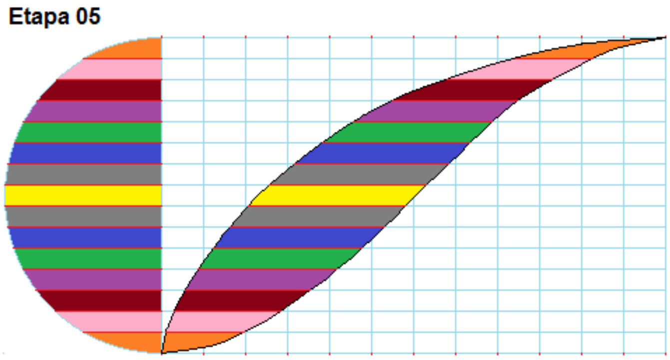
Figura 4
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 03: então ele decidiu traçar retas (A1-B1, A2-B2, An-Bn) da linha que divide o semicírculo para sua borda, e transferi-las da borda da cicloide para seu interior.



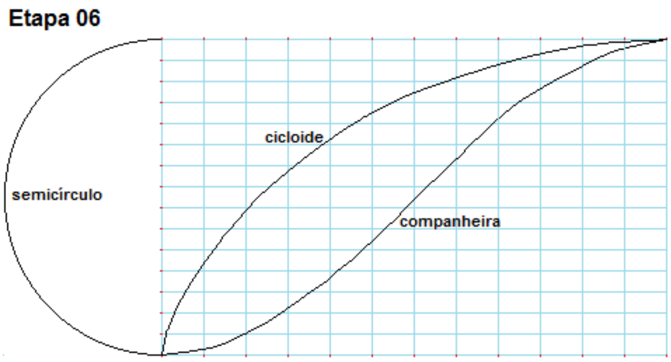
Etapa 04: ao se traçar um maior número de retas e transferi-las para a cicloide é mais visível o desenho e a curva que se forma em seu interior.

Figura 5
Fonte: Elaborado pelos autores



Etapa 05: cada parte colorida do semicírculo e da metade da cicloide, tendo a mesma coloração possui áreas iguais, logo por dedução, o desenho que se formou no interior da cicloide tem a mesma área do semicírculo.

Figura 6
Fonte: Elaborado pelos autores



Etapa 06: Roberval continuou a observar o que tinha feito até então e denominou a curva gerada pelas retas do semicírculo no interior da cicloide de “companheira” da cicloide.

Figura 7
Fonte: Elaborado pelos autores

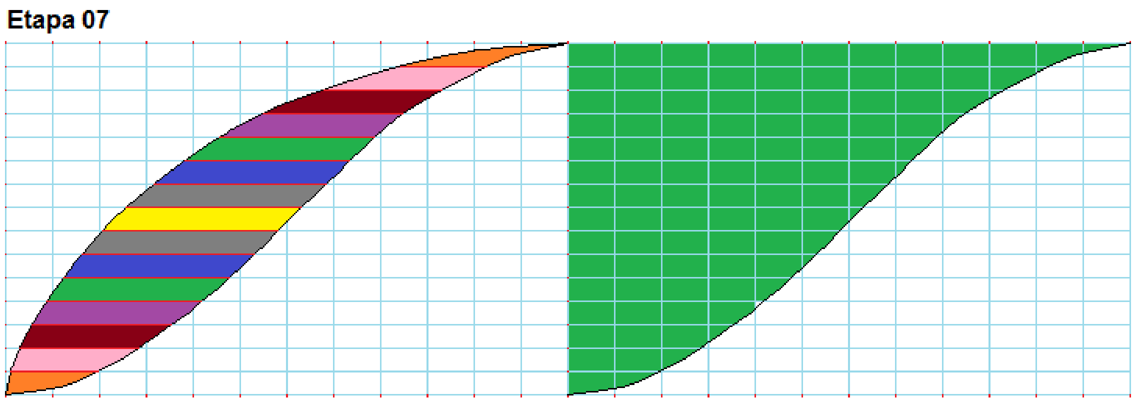


Figura 8
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 07: ao se remover a parte colorida (que é igual à metade da área do círculo que gerou a cicloide), notaremos que a companheira da cicloide dividiu o retângulo em duas partes de tamanhos e áreas iguais.

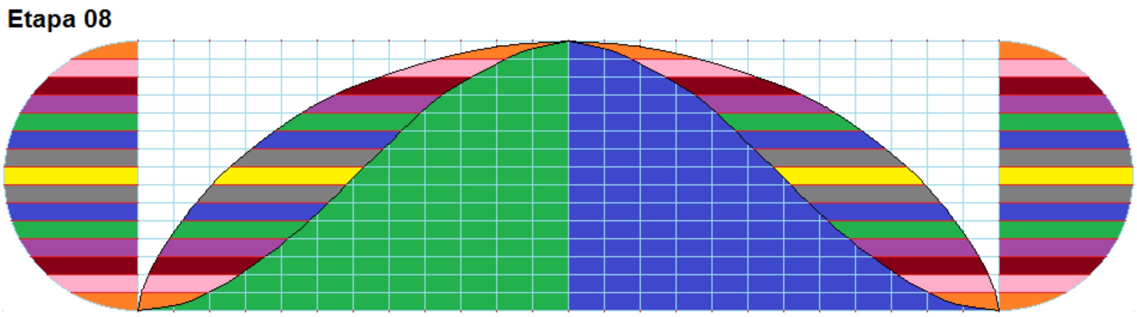


Figura 9
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 08: ao repetirmos o processo em toda a cicloide podemos notar as proporções de cada uma das áreas; a colorida em relação ao circulo que gerou a cicloide, e as de cores verde e azul em relação à metade do retângulo de base e altura iguais a da cicloide.

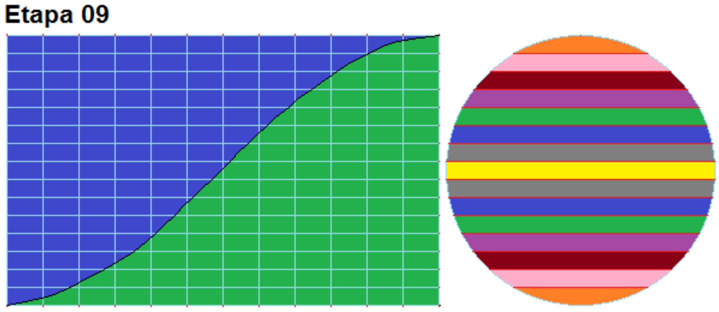


Figura 10
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 09: quando invertemos a parte azul e encaixamos na verde o resultado é equivalente a metade da área do retângulo formado por toda a cicloide, e unindo-se as partes coloridas temos a área do círculo que gerou a cicloide. Portanto podemos encontrar a área da cicloide somando essas duas áreas.

Nas nove etapas anteriores podemos demonstrar que a área da cicloide é equivalente a soma das áreas dessas duas formas geométricas mostradas na **Etapa 09**, logo para se calcular a área da cicloide é necessário apenas se ter as medidas do círculo que a gerou. Por indução pressupõe-se que se acharmos a relação numérica da área de um circulo que determina à cicloide, através de suas medidas acharemos a área dessa cicloide e a proporção entre essas duas áreas definirá um resultado universal que ao ser multiplicado pela área de um círculo qualquer resultara no valor da área da cicloide gerada por este circulo quando a ele for aplicado o movimento rotacional sem deslizar.

A seguir será feito as etapas do calculo da área da cicloide seguindo a concepção desenvolvida por Roberval, provadas anteriormente, sendo assim:

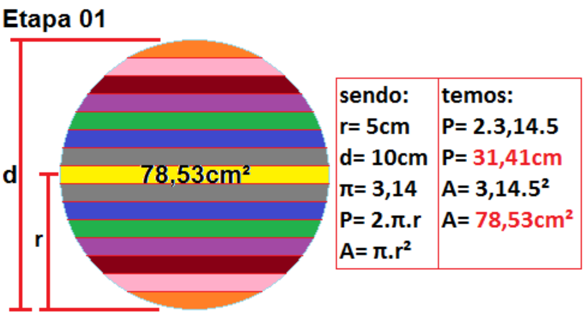


Figura 11
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 01: a princípio temos um círculo de diâmetro “d” e raio “r”, para se obter os valores do perímetro e área “Pc e Ac” do circulo, basta substituir nas fórmulas “P=2.π.r” e “A=π.r²” o valor de **π** e **r.**

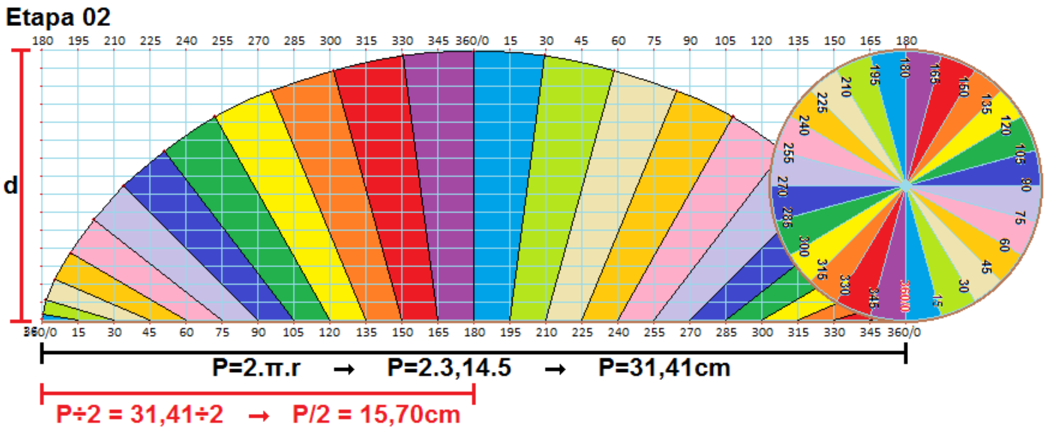


Figura 12
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 02: a cicloide e o retângulo compartilham a mesma base, e ambos possuem essa medida equivalente a do perímetro do circulo “Pc”, sendo que a altura da cicloide e do retângulo são iguais ao diâmetro “d” do círculo.

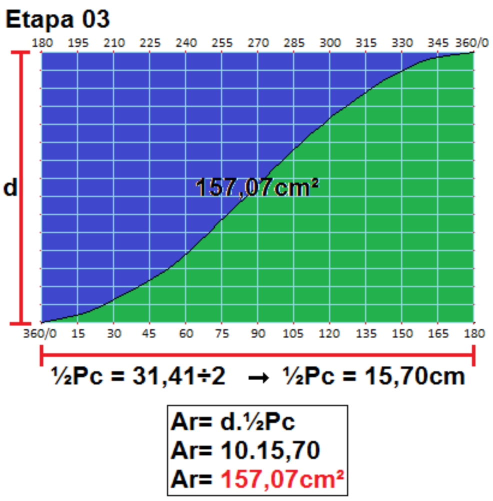


Figura 13
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 03: a base do retângulo mostrado tem metade da base da cicloide, se dividirmos o perímetro do circulo “Pc” por dois, acharemos a base desse retângulo, sabemos que a área do retângulo é equivalente a multiplicação de sua base“½Pc” pela altura “d”, fazendo essa operação encontramos a área do retângulo “Ar”.

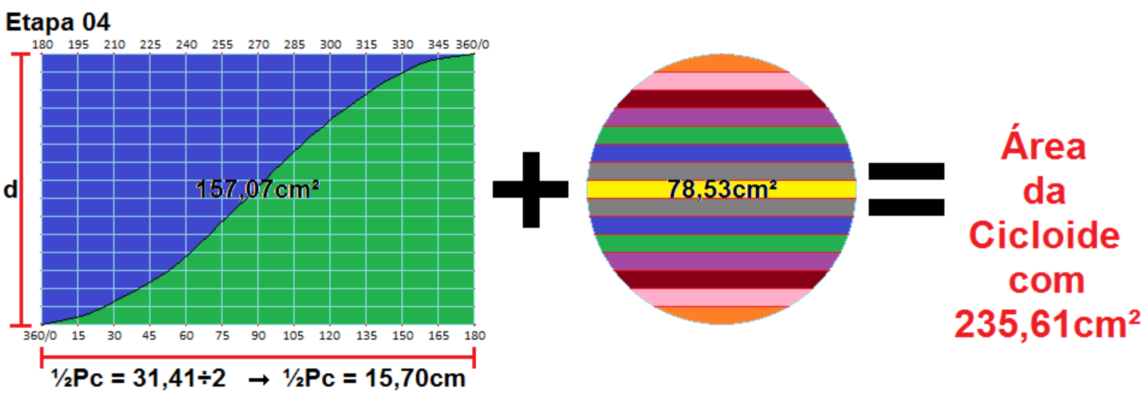


Figura 14
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 04: após calcularmos os valores das áreas do círculo e do retângulo, para se obter a área da cicloide basta somarmos essas duas áreas.

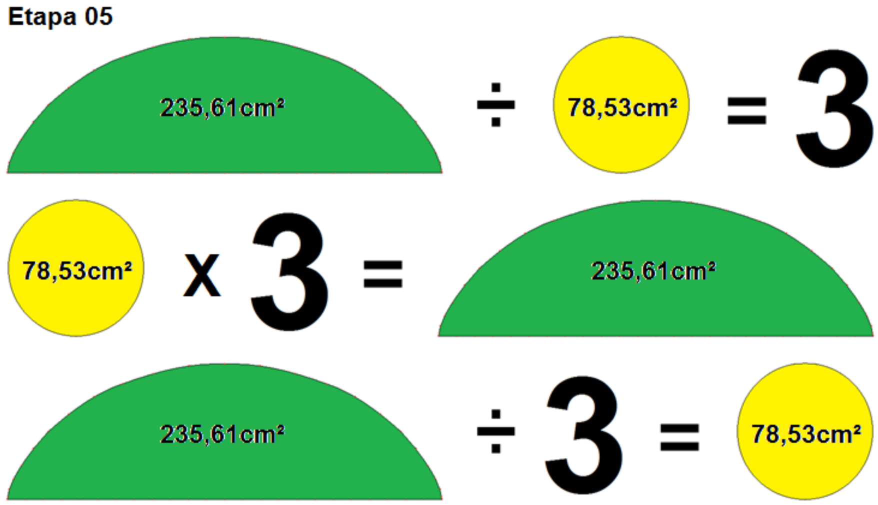


Figura 15
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 05: por fim tendo a área da cicloide e do círculo que a gerou podemos fazer o calculo que determina a proporção entre essas duas áreas e essa proporção é o resultado de uma divisão entre a área da cicloide pela área do círculo, que tem como resultado o numero **“3”**, sendo que esse valor de proporção encontrado é universal para todos os círculos e cicloides de diferentes tamanhos. Portanto para se obter a área da cicloide que um círculo pode gerar basta multiplicar a área do círculo por **“3”**, no entanto para se obter a área do círculo que gerou a cicloide deve-se dividir a área da cicloide por **“3”**.

A relação das proporções entre o círculo e a cicloide foram descobertas por Galileu Galilei, porem foi Roberval que fez tudo parecer fácil com a sua demonstração brilhante e intuitiva para se definir a área da cicloide, mas sabemos que da estaca zero até estes resultados foram varias horas de dedicação e determinação, para que no fim tudo viesse a ficar tão claro e simples.

5.1.1 - Cálculo do perímetro da cicloide

Christiann Huygens durante sua pesquisa para a confecção de um relógio de pendulo mais preciso, viu na cicloide e na sua propriedade Tautócrona uma possibilidade para esse feito, contudo durante esse processo ele pode constatar que o arco da cicloide é equivalente a oito vezes o raio do círculo que a gerou. Através de seus estudos Christiann Huygens possibilitou de uma forma prática a explicação da relação do arco da cicloide com o raio da circunferência que a gera, podendo ser demonstrado nas seguintes etapas:

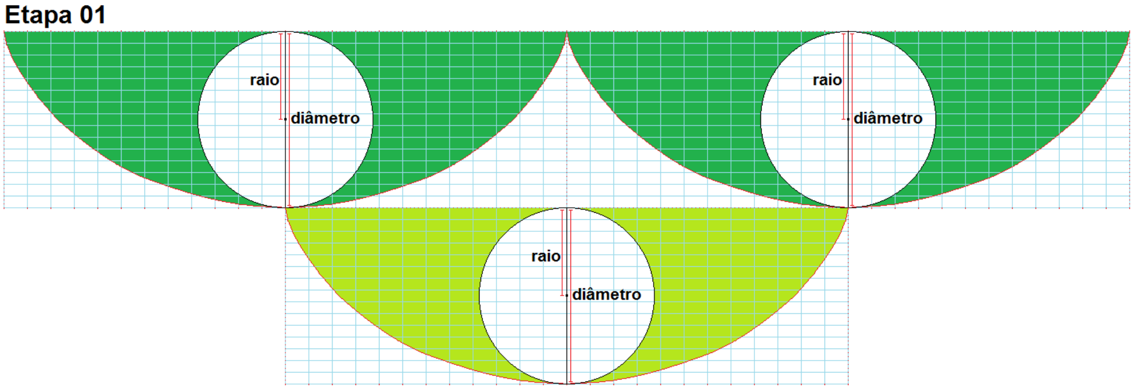


Figura 16
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 01: primeiramente devemos agrupar três cicloides com dimensões iguais, de modo que duas (em verde escuro) fiquem lado a lado e possua uma espessura mais elevada, enquanto que a terceira encoste as extremidades de sua parte reta no centro do arco das cicloides colocadas lado a lado, como se estivesse equilibrando as duas. Dessa forma podemos observar que a figura tem altura equivalente a dois círculos geradores dessas cicloides.

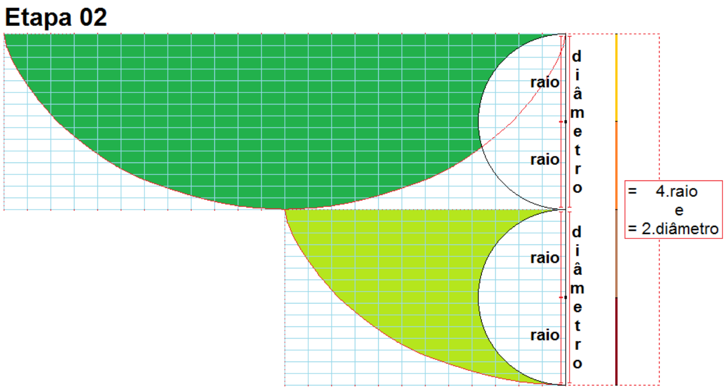


Figura 17
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 02: podemos concluir que a altura dessa figura é igual a quatro vezes o raio, como base de comparação de medida destacou-se uma reta colorida, onde cada uma das quatro cores possui valor igual ao raio, totalizando **4.r**. A fim de que se possa realizar uma experiência prática, consideremos que essa reta é um barbante de tamanho e coloração iguais a reta, de modo que se possa determinar as medidas com a maleabilidade do barbante.

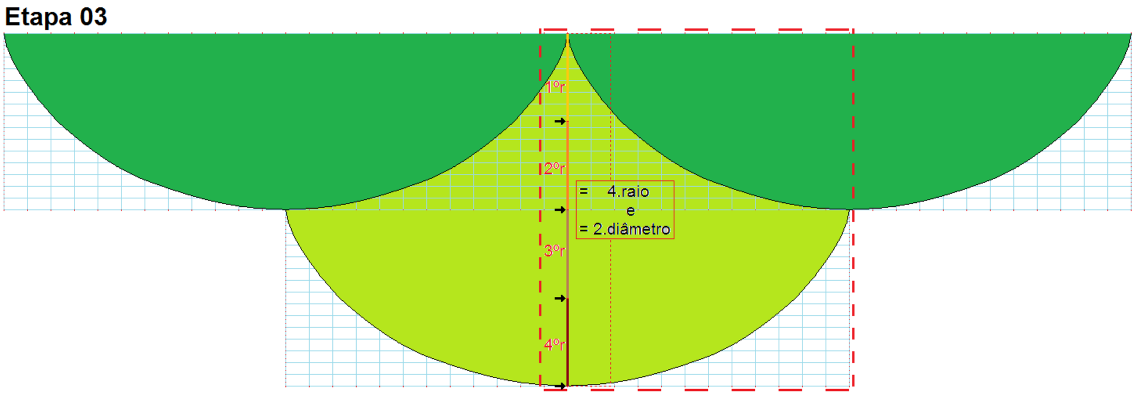


Figura 18
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 03: em seguida posicione o barbante colorido de modo que ele esteja fixado entre as duas cicloides destacadas em verde mais escuro e sua outra extremidade fique livre tocando a extremidade do arco da outra cicloide de cor verde claro. Sendo assim para que se possa ter uma melhor visibilidade, destacaremos na figura a seguir apenas a parte localizada no tracejado em vermelho, que destaca exatamente a metade da cicloide em verde escuro e uma parte um pouco maior da verde claro.

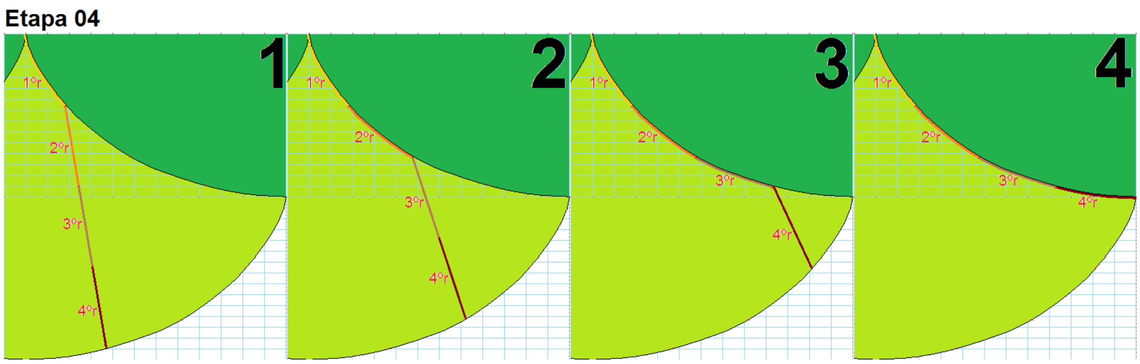


Figura 19
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 04: como foi demonstrado anteriormente o barbante possui medida igual a quatro vezes o raio da circunferência que gerou a cicloide e como a parte em verde escuro tem uma espessura maior do que a em verde claro, à medida que movemos o barbante para a esquerda ele vai se prendendo a silhueta da cicloide em verde escuro, como podemos observar nas quatro partes da figura, conforme mantemos o barbante esticado e aproximamos sua extremidade solta à cicloide em verde escuro notou-se que a metade do arco da cicloide tem medida igual a do barbante (**4.r**).

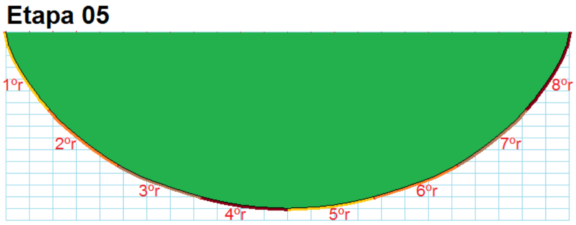


Figura 20
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 05: portanto ao observarmos toda a cicloide por definição constataremos que seu arco completo tem medida igual a oito vezes o raio da circunferência que a gerou.

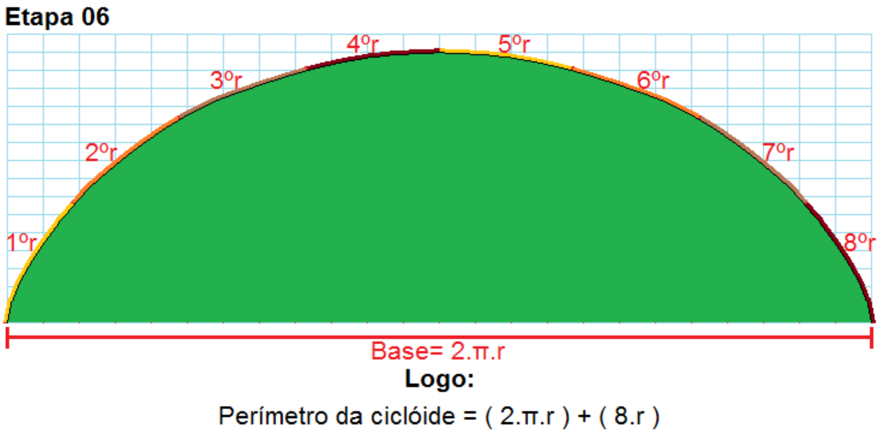


Figura 21
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 06: como a base da cicloide tem medida igual ao perímetro do circulo que a gerou de **2.π.r**, e o seu arco tem medida igual à oito vezes (**8.r**) o raio da circunferência que gerou a cicloide, logo o perímetro da cicloide "**Pc**" é equivalente à soma do valor do arco mais a base, portanto, **Pc= (2.π.r)+(8.r)**.

5.1.2 - Propriedades da curva cicloide

A cicloide possui propriedades bonitas e interessantes que ao serem interpretadas resultaram em grandes avanços tecnológicos em diversas áreas. Essas propriedades foram nomeadas como **"Braquistócrona"** que vem do grego brakhisto (o mais curto) e cronos (tempo) significando menor tempo e **"Tautócrona"** que vem do grego tautó (mesmo) e cronos (tempo) que significa mesmo tempo.

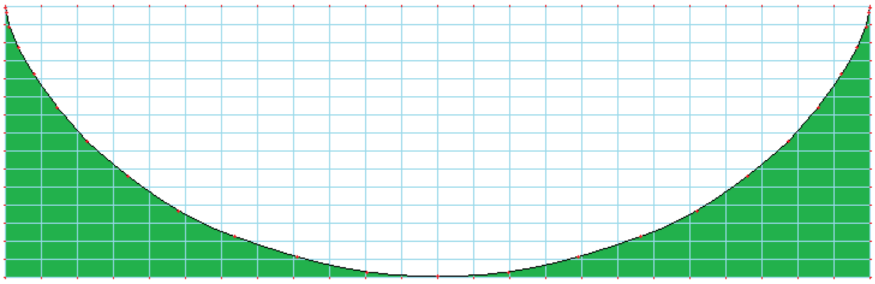


Figura 22
Fonte: Elaborado pelos autores

Para a compreensão dessas propriedades é necessário inverter verticalmente a cicloide, partindo desse ponto iremos demonstrar as duas propriedades.

5.1.2 - Braquistócrona

No grego a palavra Braquistócrona significa "menor tempo" e se encaixa perfeitamente a uma das propriedades da cicloide, onde a arquitetura dessa curva possibilita que um objeto esférico deslize com o menor intervalo de tempo quando este é submetido à experiência física a seguir:

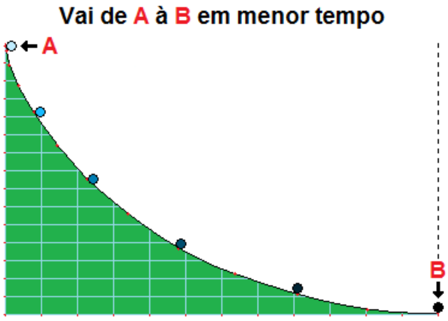


Figura 23
Fonte: Elaborado pelos autores

Ao lado temos uma rampa no formato da metade de uma cicloide invertida e nela uma esfera percorre do ponto "A" ao ponto "B" no menor intervalo de tempo possível.

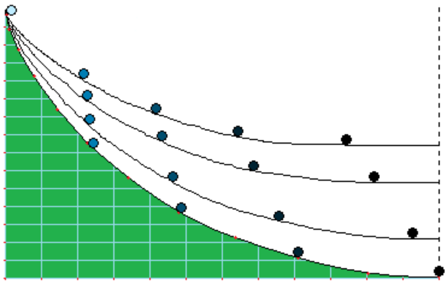


Figura 24
Fonte: Elaborado pelos autores

Se fizermos essa esfera percorrer uma série de rampas de modo que se possa analisar o intervalo de tempo que ela levaria do ponto inicial até o final, notaríamos que o menor tempo aconteceria na rampa com formato de semi-cicloide. Podemos observar que no formato de cicloide a rampa possibilita uma força de aceleração quase constante.

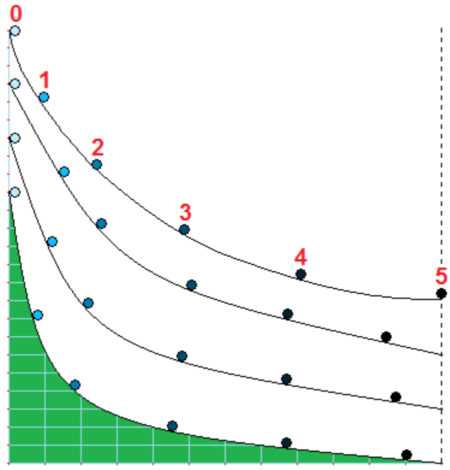


Figura 25
Fonte: Elaborado pelos autores

Ao lado, mais uma vez o menor tempo foi no formato de cicloide, pois o atrito é o mínimo possível, garantindo melhor aceleração gravitacional. Nas outras rampas a gravidade pode exercer maior aceleração até a posição “2” na qual as três são bem íngremes até então, porem entre a posição “2” e “3” acontece uma brusca desaceleração devido à alteração na angulação dessas curvas, mostrando que a cicloide no geral tem melhor desempenho.

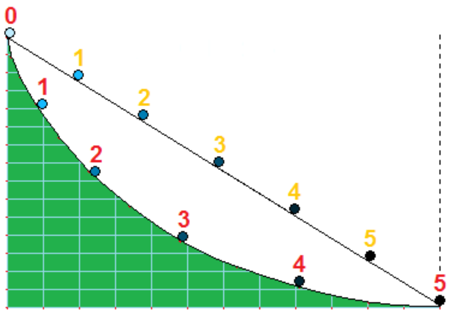


Figura 26
Fonte: Elaborado pelos autores

Partindo do pressuposto de que a menor distancia entre dois pontos é uma linha reta podemos provar que no formato de cicloide esse percurso será feito em menor tempo, pois apesar de que na cicloide em uma distância percorrida seja maior, sua arquitetura dispõe de propriedades que possibilitam maior aceleração com menor atrito possível.

5.1.3 - Tautócrona

No grego a palavra Tautócrona significa “mesmo tempo” e também se encaixa perfeitamente a uma das propriedades da cicloide na qual um objeto esférico percorra do ponto mais alto até o ponto mais baixo de uma cicloide que está posicionada na forma invertida, como demonstrado a seguir:

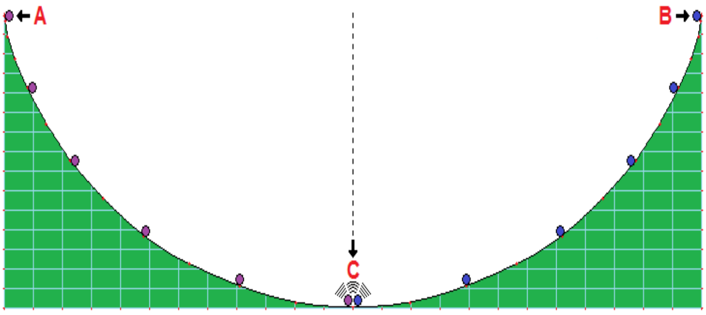


Figura 27
Fonte: Elaborado pelos autores

As duas esferas saem dos pontos “A” e “B” chocando-se no ponto “C”, mas o que ocorre se a colocássemos em desnível?

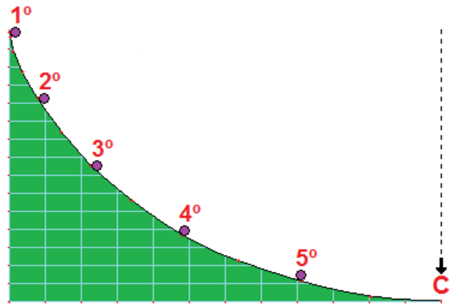


Figura 28
Fonte: Elaborado pelos autores

Independentemente da posição que se encontre a esfera (1º, 2º, 3º, 4º, 5º, ..., nº), o tempo gasto para se alcançar o ponto “C” será o mesmo, pois quanto mais alto se encontrar a esfera maior será sua aceleração e a distância a percorrer, sendo que a medida que se diminui a altura inicial menor será a aceleração e a distância, criando sempre um equilíbrio que resultara no mesmo tempo.

5.2 – A Construção do Material Pedagógico

Neste capítulo iremos demonstrar o passo a passo da construção do projeto pedagógico, que tem como intenção auxiliar o professor no ensino do conteúdo da curva cicloide. Este material é de autoria própria e necessita de poucos recursos para ser confeccionada, a intenção é que não só os professores a produzam, mas que os alunos auxiliem nesse processo, o que facilitara o deslumbre com qual a cicloide se constrói ao longo de um movimento de rotação, assim como ela é definida como um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta.

Este material pedagógico consiste em demonstrar de forma prática o movimento que constrói a cicloide, sendo elaborado de modo que os recursos necessários sejam baratos e de fácil acesso.

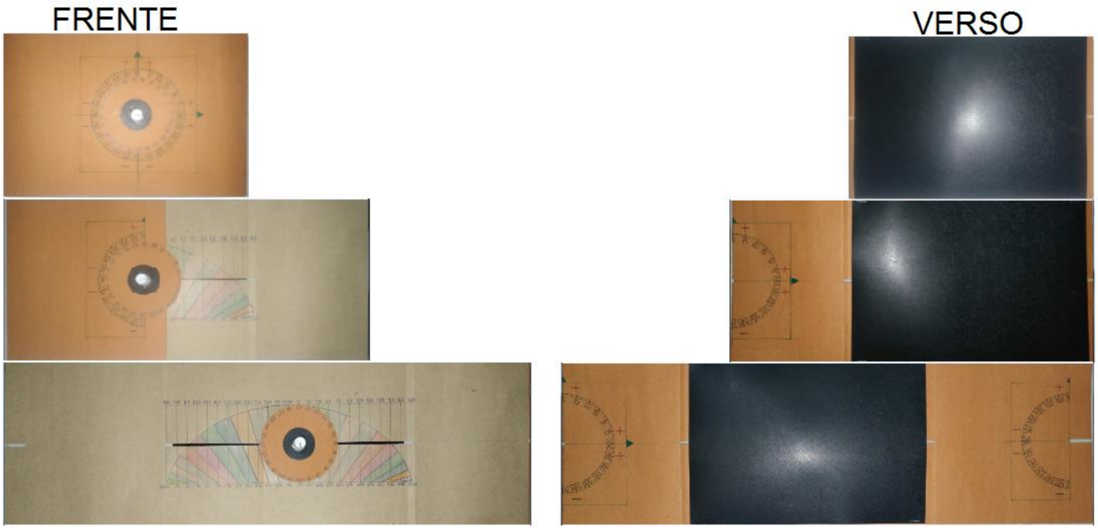


Figura 29
Fonte: Elaborado pelos autores

Materiais utilizados para se confeccionar foram: régua, tesoura, lápis, borracha, lápis de cor, canetinha, caneta azul, cola branca, cola de secagem rápida e estilete. Sendo que o material necessário é: papel cartão, capa para encadernação A4 na cor preta couro, 1 tampa de creme dental e um clips de 3 cm.

Depois de pronto, através do movimento mecânico que o circulo trigonométrico faz no sentido horário de modo que se respeite o alinhamento das coordenadas predefinidas que vão de 0º a 360º na parte inferior, e de 180º a 360º e0º a 180º na parte superior, podemos manusear com clareza a evolução da cicloide.

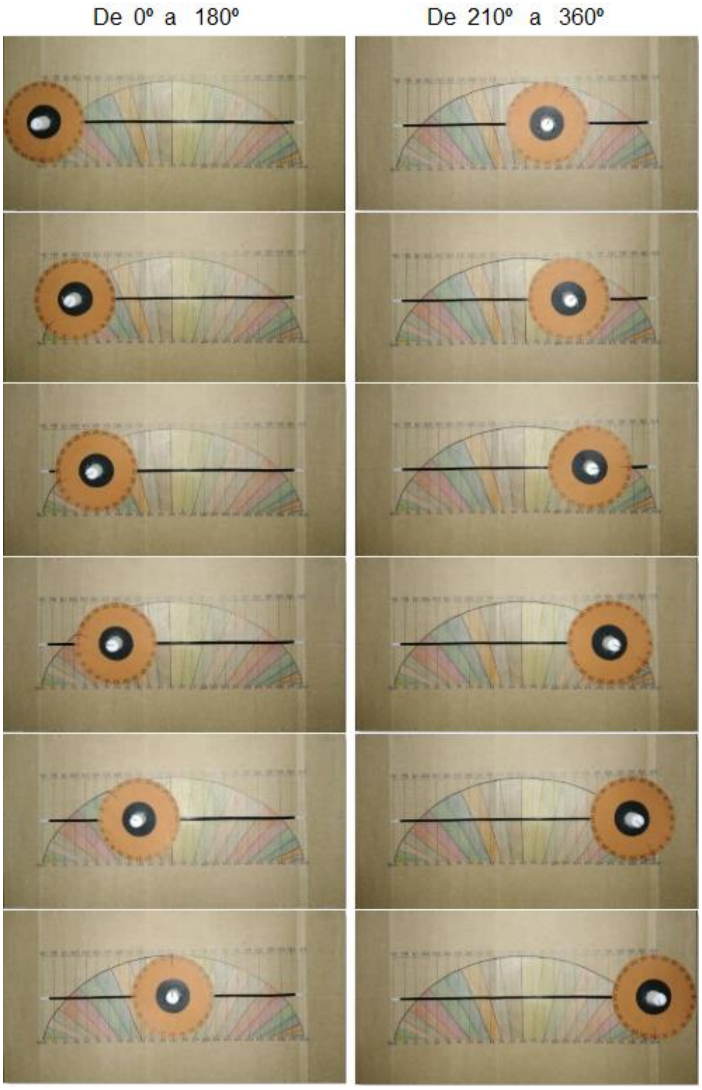


Figura 30
Fonte: Elaborado pelos autores

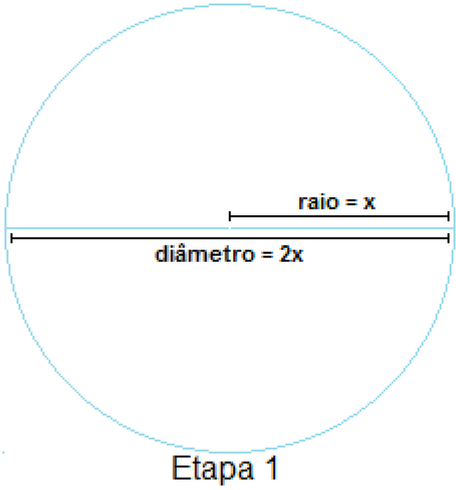


Figura 31
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 1: definir o raio da circunferência de modo que o perímetro da mesma não ultrapasse a medida do lado maior de uma folha A4, que possivelmente é a ideal a ser utilizada em sala de aula.

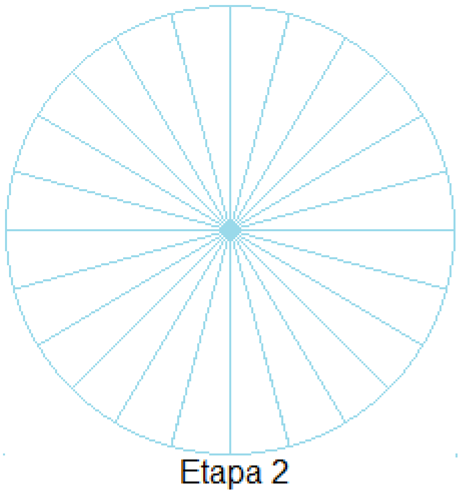


Figura 32
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 2: dividir o círculo em 24 partes com 15º cada, para facilitar tenha em mãos um transferidor de 360º. Observação: os ângulos notáveis 30º, 45º e 60º são divisíveis por 15; portanto eles aparecerão no circulo e se quiser peça para que os alunos os destaque com uma cor diferenciada por se tratar de um conceito bem utilizado posteriormente em outras áreas da matemática.

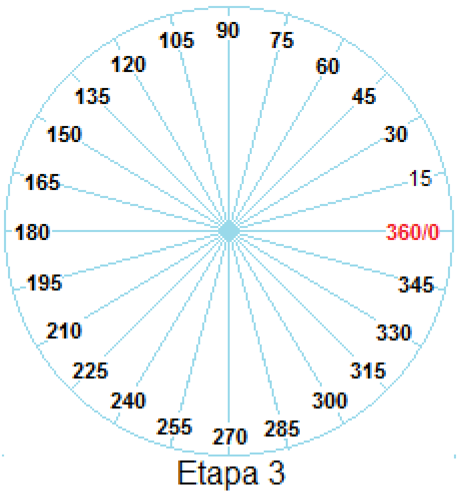


Figura 33
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 3: escreva os ângulos sobre cada extremidade da reta que cruza o eixo central da circunferência sendo que no ângulo 0º também será o ângulo de 360º como vemos na etapa 3 da figura 14, determinando todos os ângulos dos 24 pontos no perímetro da circunferência.

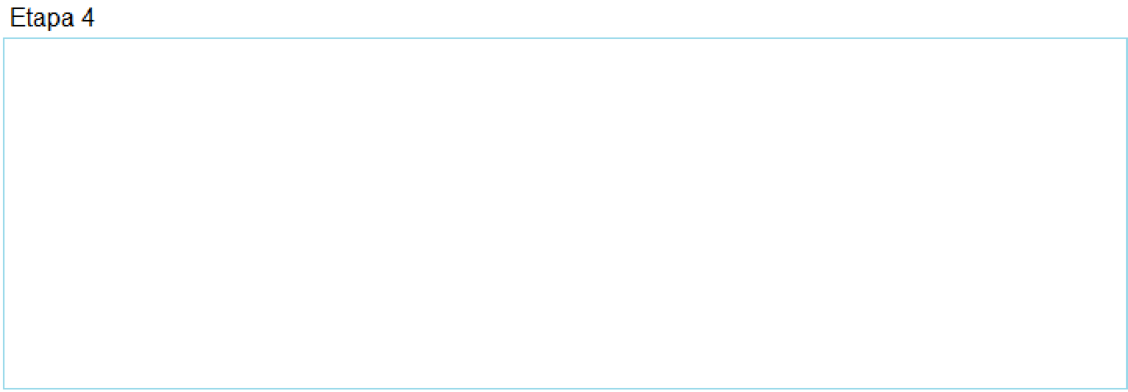


Figura 34
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 4: ao término da execução do circulo trigonométrico, construa um retângulo com altura igual ao diâmetro do circulo construído e meça o seu raio para obter a sua circunferência por meio da fórmula em que **P** representa o perímetro do circulo, **π=3,14**e **r** representa o raio, sabendo isso ache o valor de **P** na formula **$P = 2 \pi r$**; o valor da base do retângulo será igual ao perímetro do círculo.

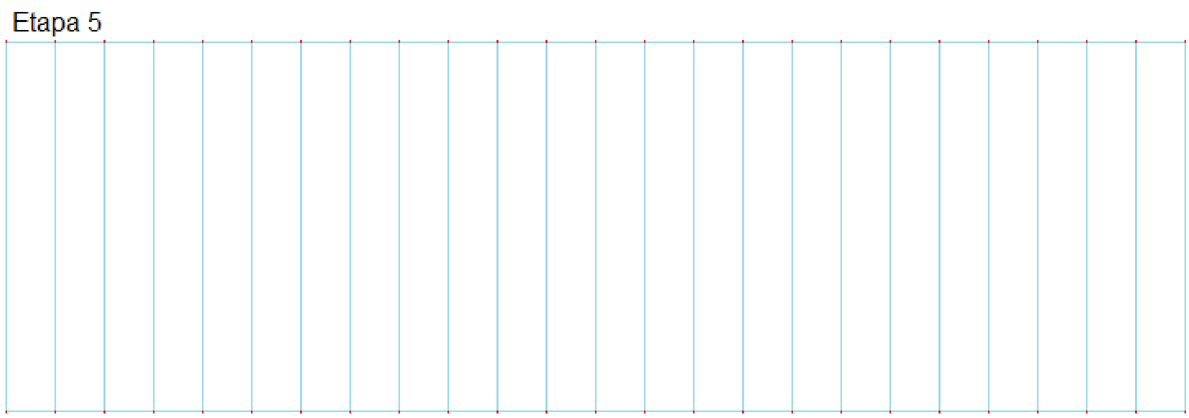


Figura 35
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 5: divida a base do retângulo em 24 parte iguais e com o auxílio de uma régua trace 23 retas perpendiculares a base do retângulo, dividindo o mesmo em 24 colunas de mesma largura e altura.

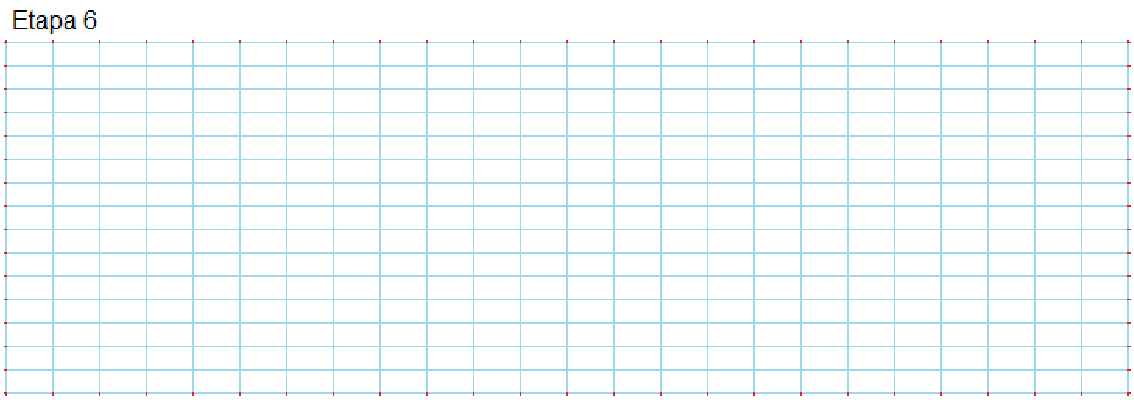


Figura 36
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 6: divida a altura do retângulo em 15 partes iguais e com o auxílio de uma régua trace 14 retas paralelas a base do retângulo, dividindo o mesmo em 15 linha linhas da mesma largura e 360 retângulos internos.

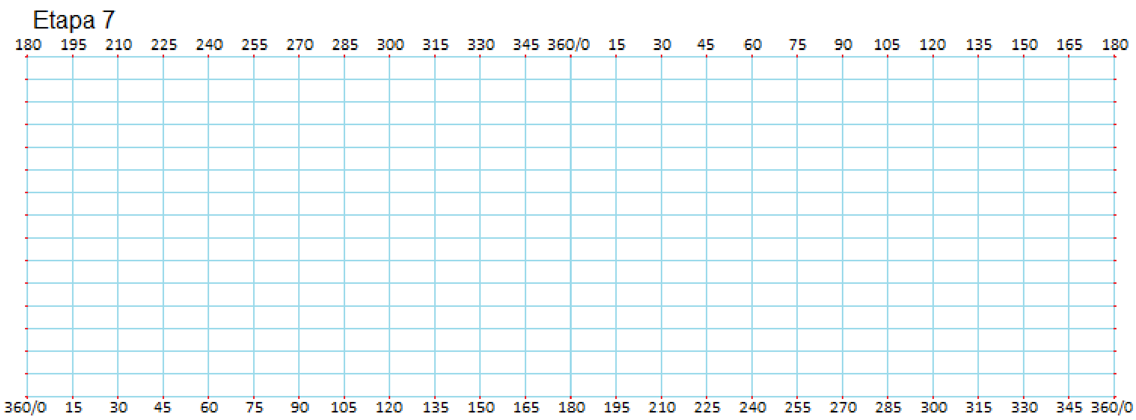


Figura 37
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 7:a união das 23 retas com a base inferior do retângulo, formaram somada as suas extremidades 25 pontos, agora da esquerda para a direita denomine os pontos com os ângulos na seguinte forma, do 1º ponto que é a extremidade inferior esquerda do retângulo até 25º que é a extremidade inferior direita do retângulo sequencialmente como: 360/0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, 225, 240, 255, 270, 285, 300, 315, 330, 345, 360/0; se observarmos vamos perceber que as extremidades do inferiores do retângulo vão ter o mesmos valor de 360/0. Na parte da base superior assim como na inferior também se obteve 25 pontos e eles também serão denominados da esquerda para a direita da seguinte forma: 180, 195, 210, 225, 240, 255, 270, 285, 300, 315, 330, 345, 360/0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180; se observar irá notar que as extremidades superiores do retângulo têm o mesmo valor de 180.

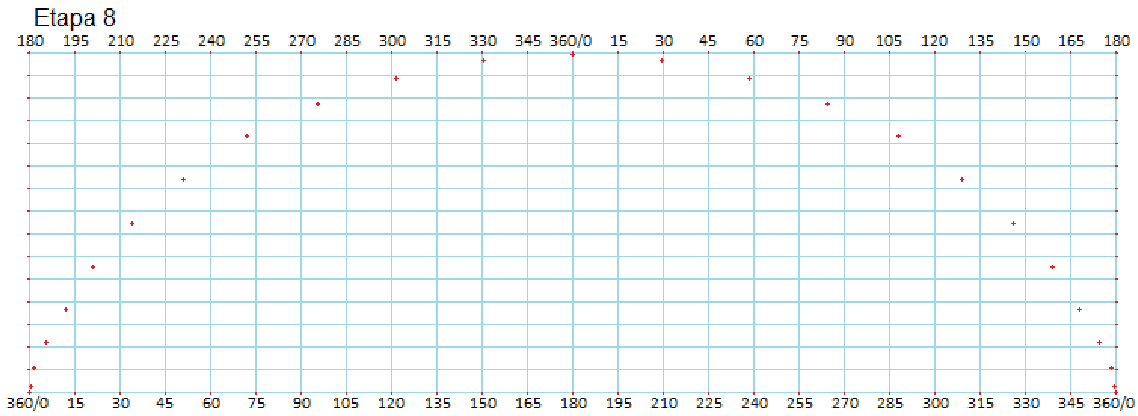


Figura 38
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 8: com capricho recorte o círculo trigonométrico concluído na etapa 3, posicione- o sobre o retângulo concluído e demarcado na etapa 7 de modo que os valores do círculo se coincide com o valores da base inferior e superior do retângulo; posicione o círculo alinhando os valores da esquerda para a direita e demarque com um ponto de modo que as posições do ângulo 360/0 do círculo trigonométrico seja transferida para o retângulo, faça isso da forma mais alinhada possível, fazendo com que as coordenadas deixadas no retângulo seja a mais fiel possível.

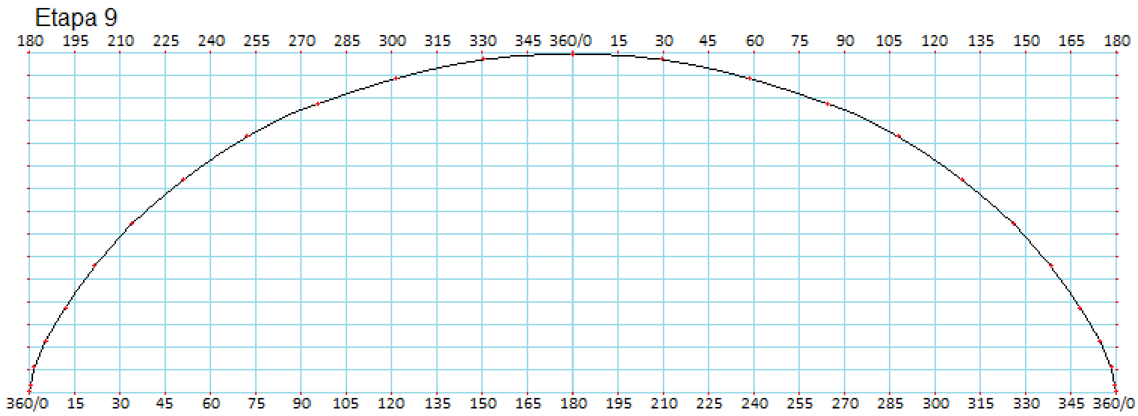


Figura 39
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 9: com capricho e em sequência interligue cada ponto gerado no retângulo com uma suave curva de modo que se obtenha uma copia o mais fiel possível do rastro que o circulo trigonométrico deixou ao rolar sobre o retângulo sem deslizar. Ao fim de todo este processo obtivemos a curvatura da cicloide.

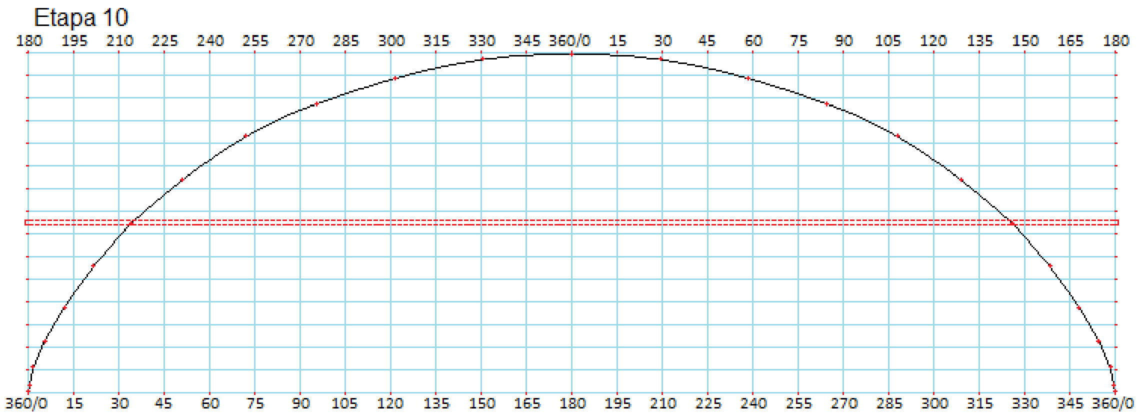


Figura 40
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 10: para que se possa adaptar o círculo trigonométrico a fim de que ele possa ser fixado no papel, crie uma canaleta destacando com uma tesoura ou um estilete a parte pontilhada.

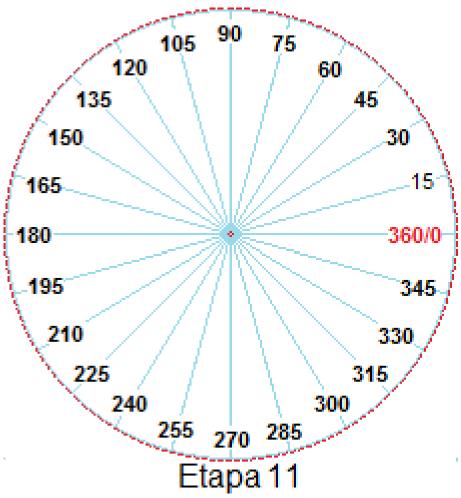
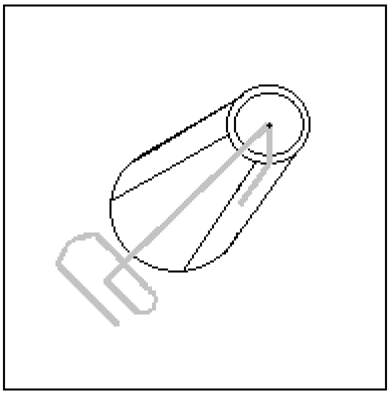


Figura 41
Fonte: Elaborado pelos autores

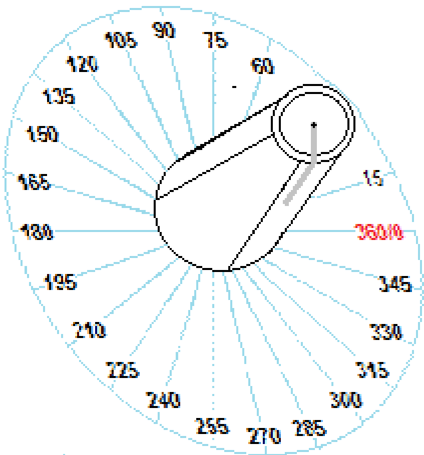
Etapa 11: com uma tesoura recorte na linha pontilhado para destacar o círculo trigonométrico e faça um furo no centro do círculo.



Etapa 12

Figura 42
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 12: faça um furo na tampa de um creme dental, e com um clipe atravesse a tampa de modo que o mesmo fique travado na tampa do creme dental como mostra o desenho ao lado.



Etapa 12

Figura 43
Fonte: Elaborado pelos autores

Etapa 13: introduza o clipe no orifício no centro do circulo trigonométrico ate que o mesmo venha a encostar-se à tampa do creme dental, cole com cola de secagem rápida.

CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer do desenvolvimento da pesquisa tivemos a importante orientação da professora Dra. Auriluci de Carvalho Figueiredo, que teve papel importante, nos norteando durante todas as etapas do trabalho, buscando sempre nos apresentar os melhores caminhos para chegarmos ao resultado que queríamos alcançar, apontando-nos os erros, as correções a serem feitas e inserindo ideias para que o trabalho ficasse de maior compreensão.

O intuito desse projeto consiste em mostrar as inúmeras aplicações que a cicloide pode proporcionar para a formação básica, tendo como referência os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e Médio, a Base Nacional Comum Curricular, explorando-a e mostrando porque essa estrutura construtiva encantou inúmeros estudiosos por toda a história, fazendo-os dedicarem muito tempo de sua vida ao estudo dessa curva.

O estudo da cicloide gerou uma série de avanços matemáticos, sendo aplicada em diversas áreas da engenharia através de suas propriedades Tautócrona e Braquistócrona possibilitando que a cicloide seja a mais apropriada para uma série de arquiteturas de um modo geral.

Portanto, em meio a tanta funcionalidade da cicloide veio uma indagação que resultou na vontade de apresentar essa forma geométrica aos alunos do ensino básico, através de um projeto que se utilize dos recursos didáticos educacionais apropriados para as redes de ensino. A princípio, a idéia era executá-lo tomando sempre o maior cuidado para tornar sua criação com o menor custo possível, para que ele se torne viável para aplicação em sala ou qualquer interessado.

Tomando como conceito as fases de desenvolvimento cognitivo com o qual Jean Piaget nos fez enxergar através de seus estudos comportamentais, com as quais os alunos de ensino fundamental e médio estão enquadrados, operatório concreto e operatório formal pode ser trabalhado através do estudo da cicloide.

Esse projeto possibilita uma interação motora e visual proporcionando uma maturação das ideias e dos conceitos abordados, ao se introduzir os métodos com os quais Gilles de Roberval determinou a área da cicloide, bem como, Christiaan

Huygens determinou o perímetro da cicloide, pode-se promover um desenvolvimento cognitivo que facilitará o processo com o qual o aluno passa da forma de pensamento operatório concreto para o formal, pois ambos conseguiram demonstrar sem o uso de cálculos, através de puro raciocínio lógico as proporções da cicloide, com isso ao se introduzir esses conceitos para os alunos pode-se torná-lo mais crítico, de modo que seus questionamentos o façam enxergar o processo de criação que tornou possível estabelecer as proporções da área e perímetro da cicloide.

Esse projeto não tem a ambição de explicar todos os cálculos e as inúmeras áreas em que a cicloide é empregada, mas tem o propósito de apresentar essa forma geométrica e as peculiaridades de sua curva e propriedades exclusivas, fazendo uma ponte que trará um conhecimento que pode ser aproveitado e somado a conceitos já explorados em algumas áreas da matemática.

Ao se introduzir o estudo da cicloide já no ensino fundamental consegue-se aperfeiçoar esse conteúdo e explorar toda a sua encantadora forma, despertando nos alunos o prazer que encantou tantos estudiosos do passado, com isso criamos um conhecimento prévio ou até mesmo mais aprofundado em seus conceitos, gerando um atalho que pode levar a um profundo conhecimento aos alunos que decidirem se render aos encantos da área de exatas em um curso superior.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponívelem: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em26 de mar. de 2019.

BRASIL. PCN Ensino Fundamental Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Bases Legais. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 20 mar. 2019.

BRASIL. PCN Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 20 de mar. 2019.

BRASIL. PCN Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Bases Legais. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em 20 mar. 2019.

BUSTILLOS, Oscar Vega; SASSINE, André. A Magia da Curva Cicloide: Braquistócrona e Tautócrona. São Paulo: ScorTecci, 2011. 252 p.

Colaboradores, historymcs. Autores históricos. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Roberval.html. Acesso em 26 abr. 2019.

GARBI, Giberto Geraldo. O Romance das Equações Algébricas. 4.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GRANDE, André Lúcio. O Estudo da Cicloide Utilizando o Software Geogebra. Ciaem, Chiapas, México, p.1-10, 3 maio 2015.

KAUARK, Fabiana da Silva; MANHÃES, Fernanda Castro; MEDEIROS, Carlos Henrique. METODOLOGIA DA PESQUISA: UM GUIA PRÁTICO. Itabuna / Bahia: Via Litterarum, 2010. 89 p. Disponível em:<https://docplayer.com.br/1122732-Metodologia-da-pesquisa-um-guia-pratico.html>. Acesso em 16 de abr. 2019.

LIMA, L. C., PIMENTEL, P. A., & DINIZ, H. A. (2004). A CICLÓIDE E O PROBLEMA HISTÓRICO DA BRAQUISTÓCRONA. A. Ciências Exatas e da Terra, 1-2. Disponível em: <http://www.sbpcnet.org.br/livro/66ra/resumos/resumos/7446.htm>. Acesso em 26 de fev. 2019.

LOPES, Lidiane Schimitz; ALVES, Antônio Maurício Medeiros. A História da Matemática em Sala de Aula: Propostas de Atividades para a Educação Básica. XXErematsul, , Bagé/rs, Brasi, p.1-11, 13 nov. 2014.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A.. Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas: Temas Básicos de Educação e Ensino. São Paulo: E.p.u, 1986. 975 p.

PEDROSO, H. A., & PRECIOSO, J. C. (2014). Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuição. IBILCE, UNESP, 1-6. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/122665. Acesso em 26 de fev. 2019.

SANTOS, Anderson Oramisio; OLIVEIRA, Camila Rezende; OLIVEIRA, Guilherme Saramago . Contribuições para o Ensino da Matemática no Ensino Fundamental, através da historia da Matemática e PCN’s. ItinerariusReflectionis, [s.l.], v. 9, n. 1, p.1-13, 3 ago. 2013. Universidade Federal de Goiás. Disponível em: :<http://dx.doi.org/10.5216/rir.v1i14.24346>. Acesso em 06 de mai. 2019.